ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Аль Имам Адель А. Абед Аль Вахаб

Математическое и компьютерное моделирование особенностей продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в каналах различного поперечного сечения

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Н.Д. Вервейко

Воронеж 2015

Содержание

Введение……...…5

Глава 1 Математическая модель течения микроструктурного вязкопластического материала…….……14

1.1 Уравнения движения представительного элемента микроструктурного вязкопластического материала……14

1.2 Граничные условия на поверхности контакта микроструктурного вязкопластического материала с подвижной материальной поверхностью и на поверхности, разделяющей материал на область покоя и область течения……..……..17

1.2.1 Граничные условия в случае идеально гладкой поверхности S …….17

1.2.2 Граничные условия на шероховатой поверхности S……18

1.2.3 Граничные условия на границе раздела твердого и вязко-пластического поведения материала……..…...…19

1.3 Особенности микроструктурного вязкопластического материала в плоском канале с шероховатыми стенками под действием продольного градиента давления…….……...…19

Глава 2 Продольное течение микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического сечения…….28

2.1 Математическая модель продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в виде системы уравнений в частных производных……..….28

2.1.1 Уравнение продольного движения и уравнение неразрывности……....28

2.1.2 Постановка граничных условий…….….32

2.2 Построение внешнего разложения по малым параметрам δ^2 и ε для скорости течения W……...34

2.2.1 Дифференциальные уравнения для членов разложения скорости……34

2.2.2 Представление эллиптической границы в виде степенного ряда по малому параметру-эксцентриситету……35

2.2.3 Формулировка граничных условий в нулевом и первом приближениях……37
2.2.4 Приближение пограничного слоя нулевого порядка……40
2.2.4.1 Пограничный слой в линейном приближении……...40
2.2.4.2 Пограничный слой в нелинейном приближении.....42
2.2.5 Возможность проскальзывания ядра течения относительно основного течения……....45
2.2.5.1 Приближение нулевого порядка $W^0(\xi)$ для внешнего разложения скорости $W^0(\xi,\theta,\delta,\varepsilon)$ в условиях скольжения на границе трубы……...45
2.2.5.2 Течение микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрической трубе……..47
2.2.5.3 Возможность проскальзывания ядра течения относительно основного течения …….……..……...…….48
2.2.6 Построение первого приближения течения материала в эллиптической трубе…….….51
Глава 3 Особенности течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре…….……..54
3.1 Постановка задачи течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре…….……..54
3.2 Приближенное решение задачи течения микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре в условиях прилипания материала к стенкам…….55
3.3 Течение микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре при условии проскальзывания на границе зазора и наличии пограничного слоя……..59
3.4 Сравнительная оценка влияния микроструктуры на расход через цилиндрический щелевой канал……..62
Глава 4 Компьютерная модель расчета продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре, построенная на алгоритме метода конечных элементов……...…64

4.1 Формулировка математической модели течения в дискретной постановке……..64
4.2 Выбор базисных функций……...65
4.3 Задание на разработку программного комплекса расчета скорости течения МВПМ в цилиндрическом зазоре и объемного расхода через поперечное сечение……...68
4.4 Описание графиков на рис. 4.2-4.10…….....70
4.5 Блок-схема программы……..……..…76
4.6 Инструкция по пользованию программой …….…..78
Заключение…….82
Список использованных источников……...84
Листинг программы.…….……..103
Приложение 1……...109
Приложение 2……...…115

Введение

В современной науке и технике математическое моделирование явлений, процессов, конструкций является одним из ведущих методов исследования и проектирования, позволяющим удешевлять работы и ускорять их проведение. В аэрокосмической области, в технологиях строительства, в процессах добычи и переработки нефти, в нано- и биотехнологиях широкое применение находят искусственные материалы с заранее спроектированными, спланированными свойствами. К таким сложным материалам можно отнести специальные композитные «жидкости», состоящие из полимеров с равномерно распределенными в них твердыми шариками диаметром 0,1-0,2 мм (проппантом). При закачивании в скважину такого материала при давлении порядка 10^3ат нефтеносные структуры трескаются, а при снятии давления в этих трещинах остается проппант, образующий своеобразный фильтр, повышающий дебит скважины. Характерной величиной такого процесса является безразмерная величина $\delta = d/D$, где d – диаметр частиц проппанта, D - диаметр технологических трубопроводов.

Аналогичная картина имеет место при течении крови, содержащей эритроциты и лейкоциты в плазме, в сосудах животных и человека. Подобный факт наблюдается при заполнении углеродных нанотрубок молекулами окислов. В процессах такого рода характерной малой величиной является параметр δ, который существенно влияет на всю картину явления и этот параметр δ не включен в классические модели вязкой жидкости, вязкоплатического материала и др., поскольку в естественных природных материалах этот параметр δ очень мал (для жидких и газообразных природных материалов $\delta \approx 10^{-6}$).

Проведение математического моделирования явлений с учетом влияния малого параметра микроструктуры δ требует разработки новых математических моделей, уточняющих известные классические модели, и новых математических подходов построения решения возникающих задач.

Общие подходы к построению математических моделей, описывающих механистическую форму движения материи, основываются на законах И.Ньютона. Однако за прошедшее с тех пор время область исследования расширилась и углубилась многократно, а в настоящее время этот процесс ускоряется [83, 84, 87, 90, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 111, 129, 130, 131, 135, 143, 144, 148, 149, 167, 162, 168, 169, 170, 177]. Развитие математического моделирования поведения микроструктурных материалов идет по многим направлениям, среди которых выделим следующие:

1. Введение в математическую модель дополнительных характеристик – вращения, поворота, скорости поворота.

2. Введение в рассмотрение микроструктуру и кинематику внутреннего перемещения частиц внутри микрообъема.

3. Исследование влияния микроструктуры на макрохарактеристики поведения материала вероятностными, статистическими методами.

4. Введение в детерминированную математическую модель микроструктурных материалов макрохарактеристик, уточняющих и развивающих классические модели.

Первый подход основан на работах братьев Коссера Е. (1909г) [6], в которых предполагается возможность вращения бесконечно малого объема среды, наличие момента инерции и необходимость введения независимого, дополнительного к классическим моделям, закона изменения момента количества движения малого объема среды. Применительно к механике жидкости и деформируемого твердого тела этот подход существенно расширен и развит в работах Аэро Э.Л., Булыгина А.Н., Кувшинского Е.В. [59], Кунина И.А. [116] и других исследователей [115,109, 14, 16, 23, 28, 103].

В последние годы прошлого века в связи с широким использованием жидких кристаллов в электронике потребовалось математическое моделирование процессов деформирования микроструктурных материалов и оптимального проектирования их параметров.

А.С. Эрингеном [8,9,178] и другими авторами [7,11, 14-17, 20, 23, 28] была разработана математическая модель расчета макроскопических параметров движения (перемещения, скорости, поворота) и внутренних микроскопических поворотов микрочастиц, определяющих яркость и светимость участков жидкокристаллических экранов. Статистические, вероятностные методы позволяют дать оценку средним, ожидаемым характеристикам материалов и параметрам течения и деформирования в терминах математического ожидания и дисперсии (среднего квадратичного отклонения) [1,2,5,12,19,22]. Широкое применение в математическом моделировании течения и деформирования материалов, в которых можно выделять отдельные дискретные элементы, находит непосредственно компьютерный вычислительный эксперимент [1, 3, 4, 5, 10, 13, 22, 25, 27, 137, 64, 65, 67].

Желание уточнять поведение материалов в различных условиях и прогнозировать его состояние такими интегральными характеристиками как прочность, устойчивость, объемный расход – ведет к введению в математическую модель нелинейных характеристик кинематики [86-88] и характеристик, обладающих большой областью определения на области материала. Расширение области определения кинематических характеристик течения или деформирования достигается путем включения в определение деформаций и скоростей деформаций производных по геометрическим пространственным координатам до третьего порядка [21,75-77,79, 82, 89, 91,132,133,142, 145, 146, 150, 156-159, 173]. Введение в кинематические характеристики производных более высокого порядка приводит математическую модель к системе уравнений в частных производных повышенного порядка с малым параметром сингулярного характера. Для решения задач сингулярного типа за последнее время успешно используется метод возмущений (метод малого параметра) с выделением регулярной части решения и решения в пограничном слое [105, 113, 120-123, 128].

В данной работе предложена математическая модель движения микроструктурного вязкопластического материала для исследования его течения в трубах постоянного сечения методами теории возмущений и компьютерного моделирования.

Актуальность темы диссертации обусловлена недостаточной адекватностью известных математических моделей, описывающих течение и деформирование материалов с микроструктурой. Это объясняется сложным влиянием микроструктуры материалов, обладающих вязкими и пластическими свойствами, на их течение и деформирование вблизи гладких и различной степени шероховатости поверхностей. Микроструктура материала слабо проявляется в областях течения с малыми градиентами скоростей, однако в местах больших градиентов скоростей свойства микроструктуры проявляются существенным образом, что влияет на весь характер течения, изменяя его качественно [29, 150, 148, 121, 122, 164].

Существенной трудностью использования течения материалов с микроструктурой является построение самой математической модели, которая описывала бы особенности реальных явлений. В настоящее время известно несколько подходов.

Одной из первых в истории является модель Коссера (1909г.), в которой, кроме перемещения элементов среды, вводится еще и микровращение как дополнительная кинематическая характеристика,

В 60-е годы прошлого века Эринген предложил и развил теорию микроструктурных материалов, введя в рассмотрение микроперемещение и микровихрь, что значительно усложнило математическую модель.

В последнее время эти два направления активно разрабатывались российскими и зарубежными исследователями (Кунин И.А., Койтер В.Т., Миндлин Р.Д., Елизарова Т.Г., Аэро Э.Л., Четвертушкин Б.Н., Быковцев Г.И. и др.). Одно из перспективных направлений моделирования течения микроструктурных материалов связано с уточнением деформационных характеристик представительных элементов $\overline{\Delta}\nabla = h^3$ [167, 171, 172, 174, 175],

приводящих математические модели исследуемых явлений к системам уравнений в частных производных сингуляторного типа (Вервейко Н.Д., Просветов В.И.) [80,81,141]. Проблемам, связанным с условиями на границах перехода материала из деформируемого состояния в недеформируемое, абсолютно твердое, посвящены работы Г.Н. Быковцева, А.А. Буренина, В.И. Ряжских, А. Д. Чернышова [18,113] и др. Одним из эффективных методов решения сингулярно возмущенных задач является метод возмущений (малого параметра), который успешно разрабатывался в последнее время (Дж. Коул, А.Х. Найфе, В.Г. Задорожный и др.) и широко использовался в решении задач течения и деформирования материалов (Д.Д. Ивлев, А.Н. Спорыхин, М.А. Артёмов и др.).

Предлагаемая диссертационная работа посвящена моделированию течения вязкопластических микроструктурных материалов методом возмущений и является продолжением научных исследований российских и зарубежных ученых, выполнена на кафедре механики и компьютерного моделирования Воронежского государственного университета в рамках темы «Разработка математических моделей и эффективных аналитических и численных методов решения статических и динамических задач механики деформируемых сложных сред с микроструктурой» (код по ГАСТНТИ 30.19.23.30.19.29).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка математической и компьютерной моделей течения микроструктурного вязкопластического материала с учетом дополнительных граничных условий и построение алгоритма расчета поля скоростей одномерного течения как инструмента математического моделирования с использованием ЭВМ.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Построение математической модели течения исследуемого материала с учетом условий на внешней границе области течения и на поверхности затвердевания материала. 2. Построение аналитических

выражений для моделирования на ЭВМ поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в трубах круглого и эллиптического поперечных сечений. 3. Разработка вычислительного алгоритма моделирования поля скоростей течения исследуемого материала в цилиндрическом зазоре. 4. Разработка программного комплекса моделирования течения МВПМ в цилиндрическом зазоре. 5. моделирования дискретного заполнения молекулами углеродных нанотрубок распределенным полем скоростей течения микроструктурного материала.

Область исследования. Областью исследований диссертации является: 1) разработка и формулировка замкнутой математической модели течения микроструктурных вязкопластических материалов с выделением различных видов граничных условий в зависимости от материальной природы деформируемого материала и свойств ограничивающей поверхности;

2) развитие качественных и приближённых аналитических методов анализа сложных математических моделей течения и деформирования микроструктурных вязкопластических материалов; 3) разработка и тестирование вычислитель методов с использованием современных компьютерных технологий. Пункты 2), 3) соответствуют формуле специальности 05.13.18.

Методы исследования. Проведенные в данной диссертационной работе исследования основаны: на классических законах построения математических моделей течения и деформирования сложных сред, методах аналитического исследования сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, методе малого параметра, использования языков программирования элементов стандартного программного обеспечения ЭВМ.

Основные положения и результаты работы, выносимые на защиту.

1. Математическая модель течения микроструктурного вязкопластического материала на неподвижных и подвижных криволинейных поверхностях с учетом граничных условий. 2. Алгоритм

расчета поля скоростей течения исследуемого материала в трубе эллиптического сечения с точностью до величин 1-го порядка по малым величинам математической модели. 3. Алгоритм расчета поля скоростей течения в цилиндрическом зазоре. 4. Программный комплекс моделирования течения МВПМ в цилиндрическом зазоре путем реализации МКЭ с нелинейными базисными функциями. 5. Математическая модель и алгоритм расчета заполнения молекулами внутренней полости углеродной нанотрубки.

Научная новизна.

1. Построены условия на границах области течения и на поверхности раздела материала на область течения и на недеформируемую часть с учетом малых величин, характеризующих микроструктуру материала.

2. Построены аналитические выражения для моделирования скорости течения и границы твердой части материала с учетом величин первого порядка относительного характерного параметра микроструктуры в случаях:

2.1. продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического поперечного сечения;

2.2. продольного течения материала в цилиндрическом зазоре.

3. Программный комплекс моделирования течения МВПМ в цилиндрическом зазоре путем реализации МКЭ с нелинейными базисными функциями.

4. Построена математическая модель послойного течения микроструктурного вязкопластического материала в круглой трубе под действием сил поверхностного натяжения, что моделирует заполнение углеродных нанотрубок молекулами. Численно подтвержден факт более быстрого движения молекул заполнителя у стенки нанотрубки по сравнению с серединой нанотрубки.

Практическая ценность. Предложенная в диссертации уточненная математическая модель программного комплекса расчета течения

микроструктурного вязкопластического материала позволяют моделировать параметры течения многих реальных технических материалов с наполнителями и биологических растворов с целью использования полученных данных при конструировании технологического оборудования и приборов. Изложенный в диссертации материал по применению метода малого параметра может служить частью спецкурсов по построению математических моделей реальных процессов.

Апробация. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры теоретической и прикладной механики факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского госуниверситета; на VII международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж 26-28 ноября 2012г.; на международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 12-14 декабря 2013г.; на VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела, 16-21 июня 2014г. (Чебоксары); на IX Международной научно-практической конференции «Инновации в науке: применение и результаты» (Россия, г. Новосибирск, 17-18 октября 2014г.); Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна, Воронеж, 26 января – 1 февраля 2014г.

Достоверность полученных в диссертации научных результатов обеспечивается использованием: фундаментальных положений теории математического моделирования и механики сплошных сред, теории дифференциальных уравнений, методов теории регулярных и сингулярных возмущений, численных методов решения дифференциальных задач, апробированных языков программирования и программ математического обеспечения ЭВМ. Правильность построенной математической модели и ее результатов подтверждается также совпадением ее с классической при предельном переходе при стремлении возмущений за счет микроструктуры к нулю.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ, из них 3 - в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

Личный вклад автора. Работы [4, 6, 7, 10, 11] выполнены автором самостоятельно. В работах [1, 2, 3, 5, 8, 9, 12] автор участвовал в постановках задач, разработке математических моделей и алгоритмов решения, выполнял все необходимые вычислительные, программистские работы и построение графического сопровождения.

Основное содержание работы

В главе 1 диссертации приведена математическая модель продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка с дополнительными граничными условиями на заданных поверхностях и на границе затвердевания материала.

В главе 2 диссертации построена процедура расчета поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического сечения, а также построены 3D-графики параметров течения.

В главе 3 диссертации приведена процедура расчета параметров течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре, дан анализ возможного проскальзывания микроструктурного вязкопластического материала вдоль стенок зазора, построены 3D-графики параметров течения.

В главе 4 приведено описание алгоритма МКЭ и программного комплекса расчета поля скоростей течения микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре и показаны примеры расчёта оценки влияния микроструктуры. В приложении к диссертации изложены возможные применения результатов диссертации к процессам заполнения углеродных нанотрубок молекулами окислов.

Глава 1. Математическая модель течения микроструктурного вязкопластического материала

1.1 Уравнения движения представительного элемента микроструктурного вязкопластического материала

В механике сплошных сред предложено и реализовано большое количество математических моделей механического поведения различных материалов – от течения жидких и газообразных до твердых деформируемых [8, 9, 117-123, 136-137, 157-159, 60, 30].

Составляющими элементами любой математической модели механического поведения материалов являются:

Уравнения движения (равновесия) представительного малого элемента $\Delta V = h^3$ материальной среды в терминах напряжений и перемещений (скоростей перемещения центра представительного объема) [147, 157-159].

Уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности сплошной среды).

Кинематические уравнения, задающие меру деформации (скоростей деформации) [6, 8, 9, 88, 59, 147].

Реологические соотношения, определяющие связь напряжений с деформациями (скоростями деформаций) [8, 9, 147].

В диссертации рассматривается течение и деформирование материалов, обладающих свойствами вязкости и пластичности, что моделируется вязкой моделью Ньютона и идеально пластической моделью Мизеса [44, 54, 85, 107].

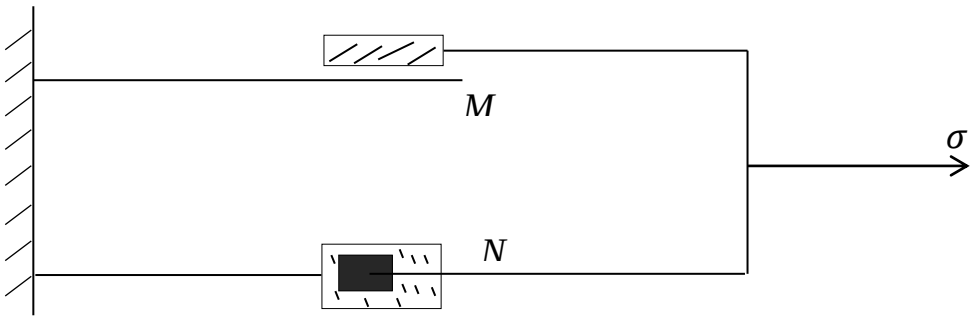


Рис 1.1 Схематическое изображение механического поведения вязкопластического материала

Для вязкого поведения материала связь напряжений и скоростей деформации определяется линейным законом Ньютона для несжимаемого материала[117-123]

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i = 1,2,3) \qquad (1.1)$$

Здесь: σ_{ij} - напряжение, ε_{ij} - скорость деформации, μ - коэффициент вязкости.

Пластическая модель Мизеса связывает напряжения и скорости деформации условием пластичности (условием предельного напряженного состояния) [104-106, 118, 119, 162, 163, 166].

$$f = \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = 2K^2;$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (1.2)$$

где:

δ_{ij} - символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, при \quad i = j \\ 0, при \quad i \neq j \end{cases}$$

К – предельное напряжение.

Скорости деформации ортогональны поверхности текучести $f(\sigma)$ в пространстве напряжений [104-106].

$$\varepsilon_{ij} = \lambda\partial f(\sigma)/\partial\sigma_{ij}. \qquad (1.3)$$

Отличительной стороной исследуемой в диссертации модели течения является учет микроструктуры материала, не предполагающий представительный объем $\Delta V = h^3$ бесконечно малым и безразмерная характеристика $\delta = h/L$ фигурирует в математической модели.

Малость, но конечность, представительного характерного объема $\Delta V = h^3$ материальной среды, занимающей объем $V = L^3$, ведет к уточнению всех дифференциальных соотношений с учетом величин порядка δ^2 в выражениях для скорости деформаций [72,75,76, 77, 79-82] .

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^{c} + \delta^2\Delta\varepsilon_{ij}{}^{c} \qquad (1.4)$$

здесь: $\varepsilon_{ij}{}^{c} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ - тензор скорости деформации Коши, v - скорость, [124, 132, 133]

$\Delta = \partial^2 / \partial x_i \quad \partial x_i -$ оператор Лапласа . В Уравнениях движения (равновесия) и в уравнении неразрывности (сплошности), содержащих первые производные по геометрическим координатам для случая микроструктурного материала при $\delta \neq 0$ появляются добавочные слагаемые порядка δ^2 [74-77]

$$\partial g / \partial x_i = \partial g / \partial x_i \big|_{\delta=0} + \delta^2 \Delta \partial g / \partial x_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{1.5}$$

Учитывая особенности влияния микроструктуры на математическую модель течения микроструктурного вязкопластического материала, представим определяющую такую модель систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \delta^2 \Delta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + g_i \ ; \tag{1.6}$$

$$\sigma_{ij}{}' = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}{}' \ ; \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}{}^{c} + \delta^2 \Delta \varepsilon_{ij}{}^{c} \ ; \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_{ij}{}^{c} = (1/2)(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i); \tag{1.9}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left((\partial v_k / \partial x_k) + \delta^2 \Delta \partial v_k / \partial x_k\right); \tag{1.10}$$

$$\sigma_{ij}{}' \cdot \sigma_{ij}{}' \geq 2K^2 . \tag{1.11}$$

В приведенной системе уравнений:

(1.6) – уравнение движения; (1.7) – реологический закон Ньютона для вязкой жидкости; (1.8) - выражение для скоростей деформации при $\delta \neq 0$; (1.9) – выражение для скорости деформации Коши; (1.10) – уравнение неразрывности; (1.11) – условие течения вязкопластического материала.

Представленная система дифференциальных уравнений требует формулировки:

1. начальных условий для нестационарного случая;
2. граничных условий на заданных внешних границах течения;
3. условий на поверхности раздела материала на область покоя и область течения.

Сама математическая модель является нелинейной с заранее неизвестной границей области застоя (отвердевания).

1.2 Граничные условия на поверхности контакта микроструктурного вязкопластического материала с подвижной материальной поверхностью

Условия контакта материала (обладающего набором таких свойств как вязкость, пластичность и наличием микроструктуры) с подвижной материальной поверхностью S различаются многообразием. Количество и форма этих граничных условий определяется влиянием вида подвижной жесткой поверхности S (гладкость или шероховатость) и величиной вклада свойств деформируемого материала во взаимодействие с поверхностью S.

1.2.1 Граничные условия в случае идеально гладкой поверхности S

Очевидно, что $V_n\big|_s = V_0 \sin\alpha$; $\sigma_{n\tau}\big|_s = 0$ - соответствует течению материала вдоль S и отсутствию трения на S.

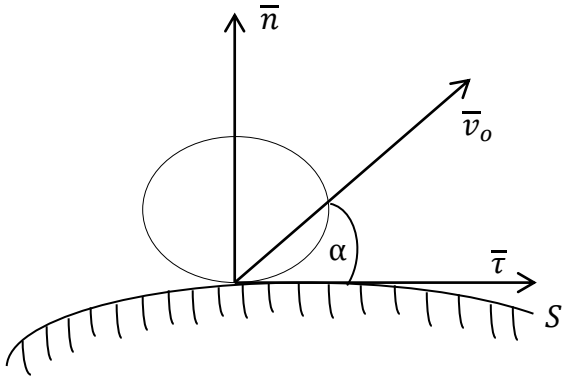


Рис 1.2 Изображение представительного элемента ΔV микроструктурного материала y границы S идеально гладкой поверхности S.

Скольжение представительного элемента ΔV вдоль S по направлению $\bar{\tau}$ предполагает отсутствие поворота элемента ΔV, т.е. $\partial v_\tau / \partial n\big|_s = 0$ (1.12)

Используя выражение напряжения σ_m через скорость v можно условие в напряжениях $\sigma_m\,|_s = 0$ представить в скоростях

$$\sigma_m - k\sqrt{2} = \mu\left(\varepsilon^c{}_{n\tau} + \frac{h^2}{2}\Delta\varepsilon^c{}_{n\tau}\right)\Bigg|_s = 0 \qquad (1.13)$$

Для прямолинейной идеальной поверхности S граничные условия примут вид

$$\partial v_\tau / \partial n\big|_s = 0; \qquad h^2\partial^3 v_\tau / \partial^3 n\big|_s = 0. \qquad (1.14)$$

Граничные условия в виде (1.12-1.14) соответствуют дифференциальным уравнениям 4-го порядка с малым параметром δ, которые при $\delta \to 0$ переходят в дифференциальные уравнения 2-го порядка, при этом одно граничное условие удовлетворяется тождественно.

1.2.2 Граничные условия на шероховатой поверхности S.

Условия прилипания представительного элемента ΔV к поверхности S состоят в совпадении скоростей точки M поверхности S и элемента ΔV, $\bar{v}_0 = \bar{v}\big|_s$, т.е. $v_0 \cos\alpha = v_\tau\big|_s$; $v_0 \sin\alpha = v_n$. (1.15)

В условиях прилипания представительного элемента ΔV к шероховатой поверхности S возможно его качение вдоль S, так что скорость точек внутри представительного элемента будет иметь линейное распределение по нормали $\bar{n}$

$$v_\tau - v_0 \cos\alpha = \gamma\partial v_\tau / \partial n\big|_s \qquad (1.16)$$

здесь: γ - характерный линейный поперечный представительного элемента вблизи S и в случае квазитвердого элемента ΔV $\gamma = h$.

Гипотеза о возможном проскальзывании элемента вблизи границы S является уточнением и может быть представлена в виде[31]

$$\partial u_\tau / \partial n\big|_s + (\gamma/2)\partial^2 v_\tau / \partial n\big|_s = 0 \ . \qquad (1.17)$$

Таким образом граничные условия (1.16-1.17) на шероховатой поверхности S являются достаточными для сингулярно возмущенной задачи 4-го порядка.

1.2.3 Граничные условия на границе раздела твердого и вязкопластического поведения материала

Выделим элемент поверхности S, отделяющий и деформируемый материал, от абсолютно твердого.

В соответствии с условием предельного состояния вязкопластического материала на поверхности S должно выполняться условие пластичности Мизеса [69,70,71,114], состоящее в достижении предельного значения интенсивности касательных напряжений $\sigma_{n\tau} = k\sqrt{2}$, которое, выраженное через скорость течения деформируемого вязкого материала, примет вид

$$\left(\sigma^{v}{}_{n\tau} - k\sqrt{2}\right)/2\mu = \varepsilon_{n\tau} + \left(h^2/6\right)\Delta\varepsilon_{n\tau} = 0 \qquad (1.18)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_k \partial x_k$ – оператор Лапласа.

Кинематика непрерывного деформирования материала на S требует непрерывности перемещений на S и непрерывности деформаций, что следует из (1.18) при $\delta = 0$

$$\partial v_\tau / \partial n = 0. \qquad (1.19)$$

1.3 Особенности стационарного течения микроструктурного вязкопластического материала в плоском канале с шероховатыми стенками под действием продольного градиента давления

Напорное течение микроструктурного вязкопластичного материала (Рис.13) определяется дифференциальным уравнением (1.20) 4-го порядка [72], условием пластичности (1.18) на границе твёрдой зоны материала и граничными условиями (1.16-1.17) на стенке трубы y=H и на границе твердого ядра течения $y = \breve{H}$ [36].

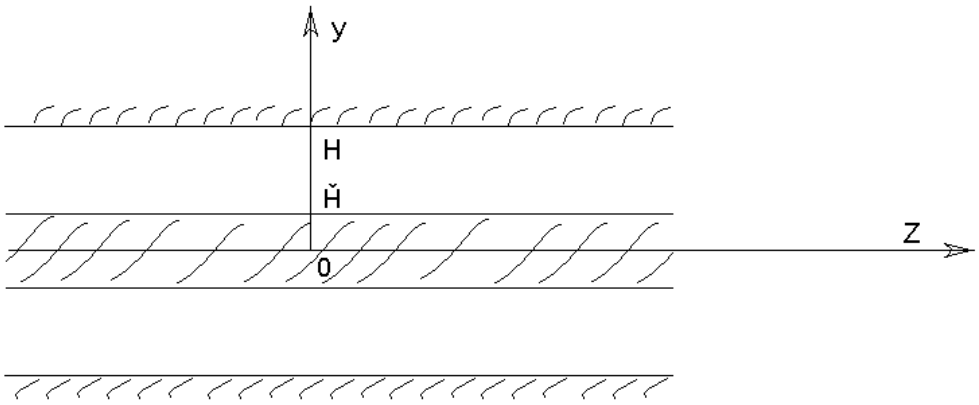


Рис 1.3. Схематическое изображение течения вязкопластического материала в трубе шириной 2H и жестким ядром течения шириной $2\breve{H}$.

$$h^2 w^{IV} + w'' = -q^2 \quad ; \tag{1.20}$$

$$w(H) = 0; w(H) - \gamma w'(H) = 0 \quad ; \tag{1.21}$$

$$w(\breve{H}) = W_0; W(\breve{H}) + \gamma W'(\breve{H}) - W_0 = 0; \tag{1.22}$$

$$\sigma_{yz}(\breve{H}) = 2k_0; \tau_0 = \breve{H} \cdot q^2, \ \tau_0 = k_0 \tag{1.23}$$

здесь q^2 - перепад давления вдоль трубы

$$q^2 = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Дифференциальное уравнение (1.20) может быть проинтегрировано два раза:

$$\delta^2 w'' + w = -\left(q^2/2\right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad . \tag{1.24}$$

Общее решение уравнения (1.20) имеет вид:

$$w(y) = C_3 \sin\frac{y}{\delta} + C_4 \cos\frac{y}{\delta} - \left(q^2/2\right) \cdot y^2 + C_1 y + C_2 - \delta^2 q^2. \tag{1.25}$$

Граничные условия (1.21-1.23) вместе с условиями баланса сил на ядре течения и условием пластичности (1.23) позволяют определить постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4, размер ядра $\breve{H}$ и скорость ядра w_0:

$$\breve{H} = \frac{\tau_0}{q^2} \ ; \ C_1 = q^2 \breve{H} \ ;$$

$$C_3 = \left[\frac{\delta q^2}{\sin\left(\frac{H-\breve{H}}{h}\right)}\right]\cdot\left(\breve{H}^1 \sin\frac{H}{h} - H\sin\frac{\breve{H}}{h}\right);$$

$$C_4 = -\left[\frac{\delta q^2}{\sin\left(\frac{H-\breve{H}}{h}\right)}\right]\cdot\left(\breve{H}^1 \cos\frac{H}{h} - H\cos\frac{\breve{H}}{h}\right); \qquad (1.26)$$

$$C_2 = \delta^2 q^2 + \left(\frac{q^2}{2}\right)H - \frac{\delta q^2}{\sin\frac{H-\breve{H}}{h}}\left(\breve{H} - H\cos\frac{H-\breve{H}}{h}\right).$$

С учетом (1.25) выражение для скорости w(y) конкретизируется

$$w(y) = \frac{q^2}{2}(H^2 - y^2) + \frac{hq^2}{\sin\frac{H-\breve{H}}{h}}\left[\breve{H}\left(\cos\frac{H-y}{h} - 1\right) + H\left(\cos\frac{H-\breve{H}}{h} - \cos\frac{\breve{H}-y}{h}\right)\right]. \qquad (1.27)$$

Скорость w_0 движения ядра течения в условиях жестких граничных условий определяется из (1.27) при y=$\breve{H}$ где $\breve{H} = \frac{\tau_0}{q^2}$

$$w_0 = \frac{q^2}{2}\left[\left(H^2 - \breve{H}^2\right) + \frac{4h}{\sin\frac{H-\breve{H}}{h}}\cdot H\left(\cos\frac{H-\breve{H}}{h} - 1\right)\right]. \qquad (1.28)$$

На рис. 1.4 - 1.5 представлены графики скорости w(y) п w_0 течения для различных значений входящих постоянных: $-\frac{h}{H}, \frac{\breve{H}}{h}$ в области $x = \frac{y}{H} \subset \left[\frac{\breve{H}}{H};1\right]$

$$V(x) = \frac{w(x)}{\left(\frac{q^2}{2}\right)H^2} = (1-x^2) + \frac{\left(\frac{h}{H}\right)}{\sin\left(\frac{1-\frac{\breve{H}}{H}}{\frac{h}{H}}\right)}\left[\frac{\breve{H}}{H}\left(\cos\frac{1-x}{\frac{h}{H}} - 1\right) + \cos\left(\frac{1-\frac{\breve{H}}{H}}{\frac{h}{H}}\right) - \cos\left(\frac{\frac{\breve{H}}{H} - x}{\frac{h}{H}}\right)\right]. \qquad (1.29)$$

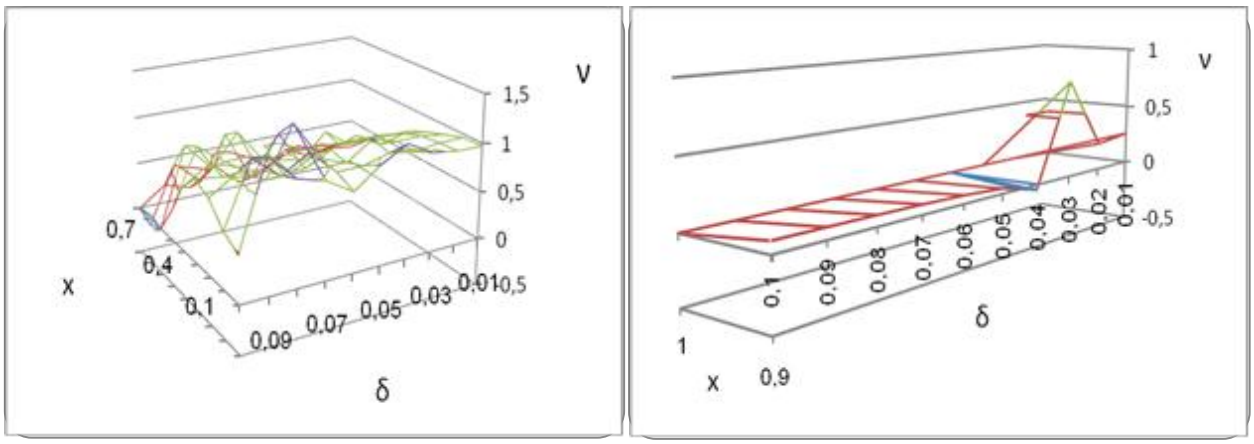


Рис 1.4. Графики зависимости скорости течения V от ширина канала для различных значений ширины $\breve{H}$ ядра течения при различных значениях параметра δ.

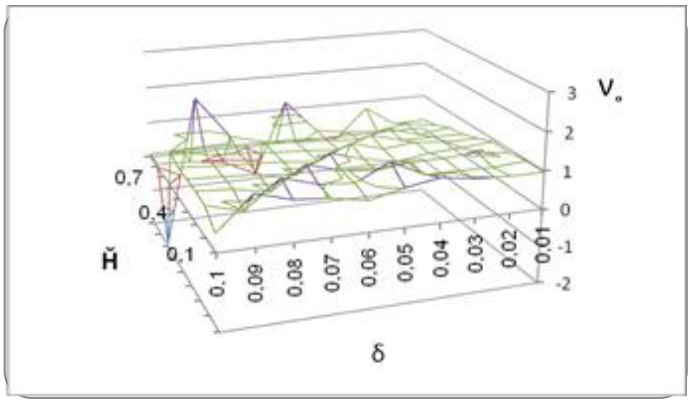


Рис 1.5. График зависимости скорости ядра течения V_o от параметров $\breve{H}$ и δ.

<u>Заключение</u>:

Приведенные графики расчётов V(x) [Рис.1.4-1.5] скорости течения материала для различных значений параметра δ показывают влияние микроструктуры на послойность течения; с увеличением $\delta \in$ [0; 0,1] число слоёв увеличивается. Отмечено резкое увеличение скорости V_0 течения ядра при некоторых значениях δ.

Выражения для скоростей течения $W(x)$ и ядра W_0 удобно представить в безразмерной относительной форме $v = \breve{H}/H$

$$\lambda_0 = W_0 / \left(H^2 q^2 / 2\right) = 1 - v^2 + \frac{4\delta}{\sin\frac{1-v}{\delta}}\left(\cos\frac{1-v}{\delta} - 1\right); \qquad (1.30)$$

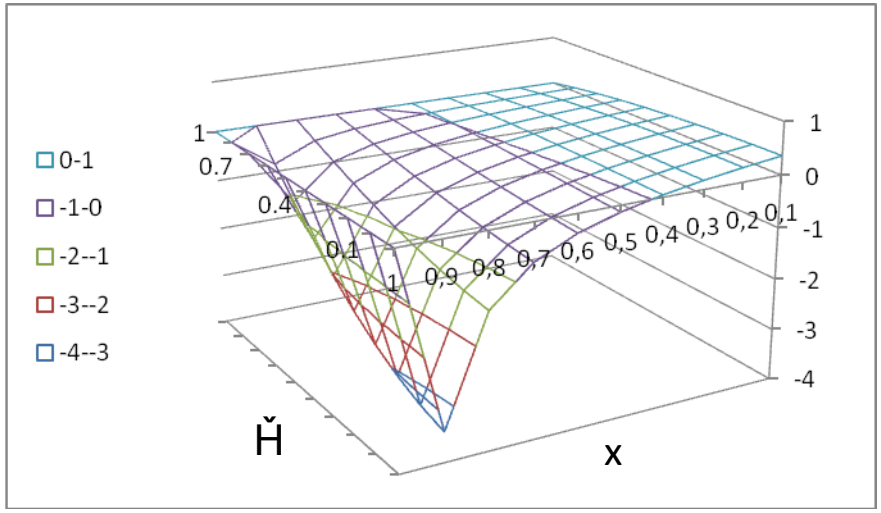
$$\lambda(x) = W(x)/(H^2 \cdot q^2/2) = 1 - x^2 + \frac{\delta}{\sin\frac{1-v}{\delta}}\left[v\left(\cos\left(\frac{1-x}{\delta}\right) - 1\right) + \cos\left(\frac{1-v}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{v-x}{\delta}\right)\right].$$

Приведенные выражения для коэффициентов скоростей λ_0 и $\lambda(x)$ показывают, что микроструктура влияет на скорости добавками порядка δ.

На рис 1.6-1.9 приведены графики скорости $w(x,\delta)$ и скорости w_0 ядра течения.

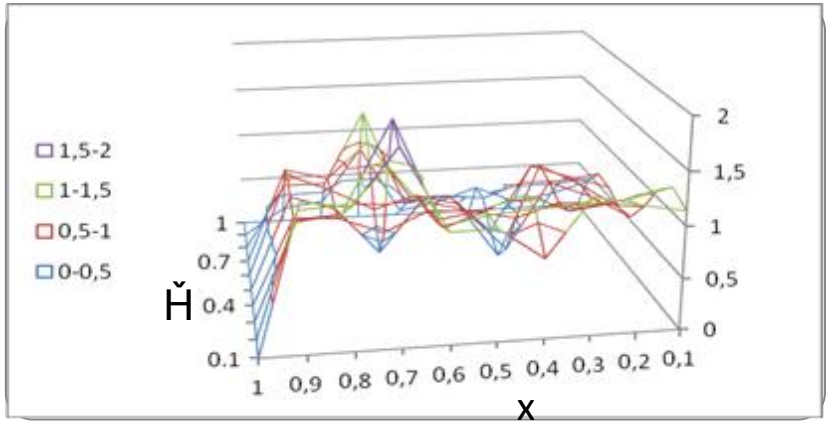
В приведенных примерах расчета скорости продольного течения $\lambda(x)$ хорошо выражена сходимость течения, при увеличении параметра δ (относительного характерного размера микроструктуры $\delta = h/H$) число слоев уменьшается, а амплитуда скоростей в слоях увеличивается. Уменьшение $\delta \to 0$ ведет к гладкому течению.

0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	Ȟ / x
-3.42827	-1.41394	-0.71882	-0.3542	-0.12219	0.043253	0.170513	0.273846	0.361227	0.1
-3.28675	-1.34324	-0.67458	-0.32514	-0.10368	0.053615	0.174182	0.271798	0.354175	0.2
-3.07425	-1.24481	-0.61704	-0.29004	-0.08355	0.062608	0.174281	0.264461	0.34042	0.3
-2.79401	-1.12048	-0.54753	-0.24996	-0.06265	0.069505	0.170193	0.251307	0.319513	0.4
-2.45035	-0.97263	-0.46777	-0.20625	-0.04212	0.073359	0.161104	0.231637	0.29085	0.5
-2.04863	-0.80421	-0.37985	-0.16057	-0.0233	0.073011	0.146017	0.204582	0.253675	0.6
-1.59515	-0.61864	-0.28622	-0.11482	-0.0078	0.067109	0.123761	0.169119	0.207088	0.7
-1.09711	-0.41982	-0.18963	-0.07119	0.002597	0.054123	0.093007	0.124083	0.150062	0.8
-0.56249	-0.21206	-0.09313	-0.03206	0.005909	0.032363	0.052285	0.068179	0.081449	0.9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1



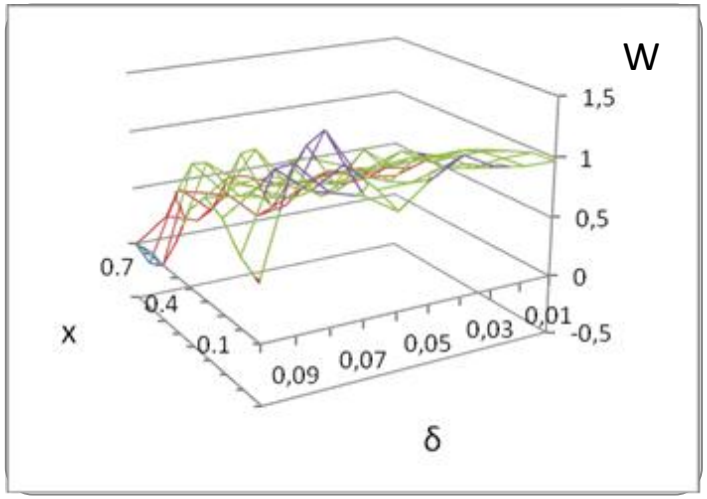
На рис 1.6 представлен график продольной скорости течения W для $\delta = 0{,}1$ как функции ширины $\breve{H}$ ядра течения и координаты x. Рассчитанные значения скорости W в области ядра отрицательные u являются фиктивными, т.к. расчетные формулы не применимы в этой области.

0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	Ȟ / x
1.411618	1.330961	1.8461	1.064641	1.069703	0.768993	1.314882	1.213991	1.138425	0.1
1.199489	1.225676	1.978861	0.976498	1.058114	1.090713	1.107253	1.134517	1.22909	0.2
0.953536	1.003783	1.431667	0.896637	0.961218	1.095647	0.913213	0.971597	1.075651	0.3
0.853917	0.82332	0.661635	0.852512	0.82213	0.733288	0.86519	0.829048	0.77321	0.4
0.927864	0.785845	0.312372	0.820333	0.70437	0.272431	0.942979	0.773573	0.535472	0.5
1.024644	0.843068	0.622242	0.74694	0.633461	0.054039	0.992316	0.773428	0.498266	0.6
0.954146	0.841245	1.20522	0.598677	0.573461	0.177768	0.866707	0.727614	0.594666	0.7
0.661662	0.66253	1.405796	0.392335	0.460014	0.41034	0.562114	0.55873	0.616521	0.8
0.278193	0.333324	0.901653	0.179714	0.259513	0.400021	0.220671	0.284139	0.405828	0.9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1



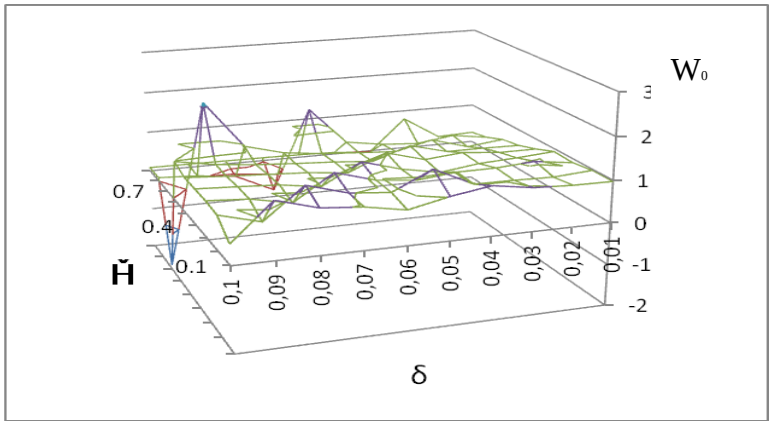
На рис 1.7 представлен график продольной скорости W для $\delta = 0{,}01$ как функции ширины ядра течения $\breve{H}$ и координатах, на котором явно видна слоистость течения.

0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	δ \ x
0.479893	1.324671	1.058042	0.978726	0.811403	1.014877	1.159191	1.018248	0.977727	0.972182	0.1
0.580016	1.202977	0.980462	1.145134	0.896155	0.901364	0.970785	0.928434	0.961762	0.963132	0.2
0.783921	0.963789	0.837692	1.333364	0.926993	0.828265	1.011403	0.937199	0.937595	0.900013	0.3
0.858169	0.81761	0.756768	1.134492	0.726765	0.861004	0.954613	0.811637	0.868216	0.831079	0.4
0.670139	0.849202	0.752647	0.769728	0.580859	0.708594	0.752829	0.77196	0.752735	0.752409	0.5
0.30996	0.923274	0.707732	0.710707	0.61179	0.547799	0.808729	0.61872	0.627658	0.62233	0.6
0.007645	0.835014	0.532897	0.869923	0.510715	0.522485	0.524693	0.523291	0.514586	0.514695	0.7
-0.07838	0.53798	0.289538	0.750935	0.214246	0.33615	0.455603	0.348656	0.389266	0.347242	0.8
-0.00693	0.195772	0.105496	0.30051	0.043362	0.091705	0.309998	0.192453	0.21634	0.184166	0.9



На рис 1.8 представлен график продольной скорости течения W (x, δ) в области малых δ. Из графика следует увеличение слоистости течения с увеличением δ для $\delta \in [0{,}01;\ 0{,}09]$.

0.1	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	Ĥ / δ
0.479893	1.324671	1.058042	0.978726	0.811403	1.014877	1.159191	1.018248	0.977727	0.972182	0.1
0.821061	0.566624	1.284529	1.013711	0.930951	1.367983	0.928879	0.925303	0.906308	0.973407	0.2
0.861304	0.801593	0.613536	1.217627	0.947664	0.853356	0.951603	0.959116	1.025596	0.90384	0.3
0.859957	0.81554	0.761986	0.624427	1.123963	0.86037	0.688463	0.812769	0.863968	0.929675	0.4
0.862053	0.801403	0.751991	0.701866	0.601787	1.003539	0.751992	0.836574	0.751994	0.752003	0.5
0.989606	0.828863	0.735619	0.672746	0.621364	0.547374	0.856353	0.620634	0.619252	0.604205	0.6
-1.88724	2.101013	0.943192	0.694817	0.586196	0.522116	0.462635	0.682406	0.417996	0.524552	0.7
0.079667	0.032765	-0.07338	-0.51994	1.483068	0.556654	0.413786	0.349517	0.481699	0.34833	0.8
0.086203	0.083847	0.080334	0.074688	0.064511	0.042046	-0.03873	0.78273	0.218387	0.25423	0.9



На рис 1.9 представлен график скорости W_o ядра течения. Из графика следует, что существуют такие размеры макроструктуры δ и размер ядра течения, при которых скорость ядра W_o, а следовательно, и расход материала будут экстремальны.

Глава 2 Математическое моделирование продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического сечения

2.1 Математическая модель продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в виде системы уравнений в частных производных

2.1.1 Уравнение продольного движения и уравнение неразрывности

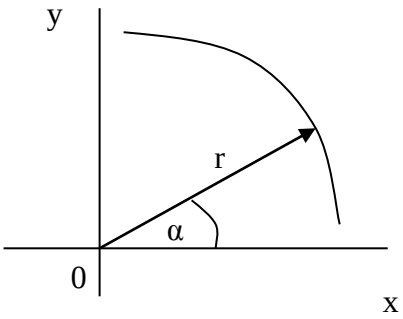


Рис.2.1. Схематическое изображение поперечного сечения трубопровода некруглого поперечного сечения.

Рассмотрим поступательное движение вязкопластического материала [72], учитывающего свойства микроструктурной жидкости [74-77], в трубе эллиптического поперечного сечения. Математическая модель такого движения приведена в цилиндрической системе координат [72]. Конкретизируем уравнение стационарного движения в напряжениях:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\dfrac{\sigma_{r\theta}}{r} + \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\sigma_{rz}}{r} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0; \end{cases} \qquad (2.1)$$

Реологические уравнения для вязкопластического материала примем в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda_{kk}\delta_{ij} + 2\mu_{ij} \quad ;$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{c}{}_{ij} + \frac{h^2}{12} \cdot \Delta\varepsilon^{c}{}_{ij} \quad ; \qquad (2.2\ )$$

здесь $\varepsilon^{c}{}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i}\right), \qquad i, j = 1,2,3;$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ - оператор Лапласа; ϑ_i - скорость; λ, μ - объемный и сдвиговый коэффициенты вязкости.

В цилиндрических координатах компоненты тензора скоростей деформаций Коши представимы в форме:

$$\begin{cases} \varepsilon^c_{rr} = \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}; \ \varepsilon^c_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} + \frac{\vartheta_r}{r}; \ \varepsilon^c_{zz} = \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z}; \\ \varepsilon^c_{\theta z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta}); \\ \varepsilon^c_{zr} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \vartheta_z}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}); \\ \varepsilon^c_{\theta r} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_\theta}{r}); \end{cases} \qquad (2.3)$$

Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Упростим систему уравнений в частных производных для исследуемого случая стационарного движения материала вдоль трубы так, что вдоль оси Z напряжения и скорости не изменяются, т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta_v}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{vv}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{v\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{vz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

и система (1) - (3) примет вид для случая напорного движения $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \neq 0,\ \vartheta_v = 0,\ \vartheta_\theta = 0,\ \vartheta_z = \vartheta(v,\theta).$

Уравнения движения в напряжениях:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} = 0; \end{cases} \tag{2.4}$$

Выражение для компонент тензора скоростей деформаций Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^c = 0;\ \varepsilon_{\theta\theta}^c = 0; \varepsilon_{zz}^c = 0; \\ \varepsilon_{\theta r}^c = 0;\ \varepsilon_{z\theta}^c = \frac{1}{2r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_{zr}^c = \frac{1}{2} \frac{\partial \vartheta}{\partial r}; \end{cases} \tag{2.5}$$

Выражение для компонент тензора скоростей деформаций с учётом величин порядка h^2:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = 0;\ \ \varepsilon_{\theta\theta} = 0;\ \ \varepsilon_{zz} = 0; \\ \varepsilon_{\theta r} = 0;\ \ \varepsilon_{z\theta} \neq 0;\ \ \varepsilon_{zr} = 0; \\ \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{z\theta}^{\tilde{n}} + \frac{h^2}{24} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{h^2}{24} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^3 r}{\partial \theta^3}; \\ \varepsilon_{zr} = \varepsilon_{zr}^{\tilde{n}} + \frac{h^2}{24} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial^2 r}{\partial r^2} \right) + \frac{h^2}{24} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 r}{\partial \theta^2 \partial r}; \end{cases} \tag{2.6}$$

Для рассматриваемого случая скорость объемной деформации отсутствует, так что уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 0 \tag{2.7}$$

С использованием выражения (2.6) для ε_{ij} тензор напряжений приобретает конкретный вид:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = -p; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \\ \sigma_{r\theta} = \dfrac{\mu}{r} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \theta} + \mu \dfrac{h^2}{12} \cdot \dfrac{1}{r} \left[\dfrac{\partial}{\partial r} \left(r \dfrac{\partial}{\partial r} \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) \right) + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} \right]; \\ \sigma_{rz} = \mu \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial r} + \mu \dfrac{h^2}{12} \cdot \dfrac{1}{r} \left[\dfrac{\partial}{\partial r} \left(r \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} \right) + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial^3 \vartheta}{\partial r \partial \theta^2} \right]; \end{cases} \tag{2.8}$$

В уравнениях (2.4) при выражениях (2.8) для компонент тензора напряжений два первых дифференциальных уравнения движения материала в напряжениях удовлетворяются тождественно. Подстановка выражений (2.8) для компонент тензора напряжений через скорость $\vartheta(r,\theta)$ дает уравнение (2.9) в частных производных 4-го порядка для $\vartheta(r,\theta)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \xi \partial \theta^2} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{h^2}{12} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \frac{h^2}{12} \frac{1}{\xi^2} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \xi \partial \theta^2} \right] \right\} = -g^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

здесь: $-\dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\dfrac{g^2}{\mu}$ - продольный градиент давления вдоль оси Z, приводящий к движению материала вдоль оси Z.

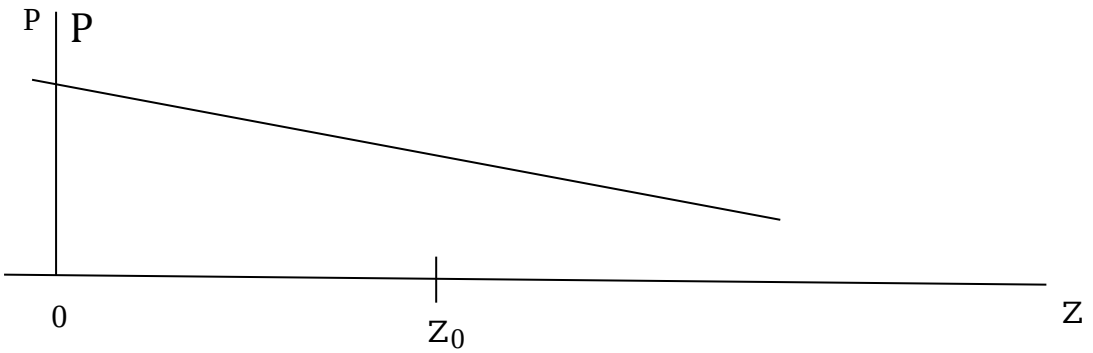


Рис. 2.2. График линейного изменения давления P(z) в окрестности исследуемой точки z =z0

Безразмерный вид уравнения (2.9) получили, вводя характерную скорость V_0 движения материала, характерный линейный размер R_0 и безразмерные скорость, радиус и линейный размер микроструктуры: $W = \vartheta \backslash V_0$, $\xi = r / R_0$, $\delta = h / R_0$.

Тогда уравнение для W примет вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\delta^2}{12}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right) + \frac{1}{\xi}\frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \theta^2}\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\delta^2}{12}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3}\right]\right\} + \qquad (2.10)$$
$$+ \frac{1}{\xi}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\delta^2}{12}\frac{1}{\xi^3}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\right) + \frac{1}{\xi}\frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \theta^2}\right]\right\} = -q^2$$

где $q^2 = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{R_0^2}{V_0}$ - безразмерный перепад давления p вдоль продольной оси Z.

Уравнение в частных производных 4-го порядка (2.10) является сингулярно-возмущенным в случае малых величин δ, поэтому при применении к нему метода возмущений для построения решения необходимо выделять основное решение и решение в пограничном слое [102,108,110,112,160,165].

2.1.2 Постановка граничных условий

Рассмотрим течение исследуемого материала в прямолинейной трубе замкнутого сечения (Рис.2.3) при условии образования жесткого ядра течения, которое не деформируется и двигается прямолинейно с характерной скоростью V_0.

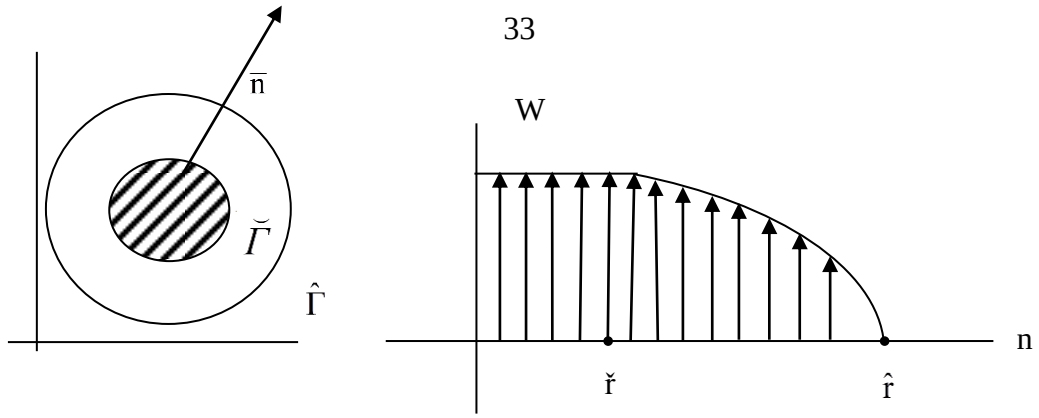


Рис.2.3. Поперечное сечение трубопровода с выделением в нем жесткого ядра течения и распределение скорости течения W.

Рассмотрим далее течение в трубопроводе эллиптического поперечного сечения, контур которого представим в форме

$$x = R_0 + \Delta \mathrm{Cos}k\theta$$

$$x = R_0 + \Delta \mathrm{Sin}k\theta \qquad (2.11)$$

Здесь $E = \Delta / R_0$ – относительная малая величина (Рис. 2.3)

В качестве граничных условий зададим:

Условие прилипания материала к стенке $\bar{n}$ трубы:

1. $W\big|_{\hat{r}} = \hat{V}$; (2.12)

Условие качения элементарного объема $\Delta V = h^3$ вдоль стенки $\bar{n}$ или условие возможного скольжения:

2. $W\big|_{\hat{r}} = \gamma \dfrac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\hat{r}}$;

$$\partial W/\partial n\big|_{\hat{r}} = \gamma \frac{\partial^2 W}{\partial n^2}\Big|_{\hat{r}}; \qquad (2.13)$$

Условие неразрывности течения на ядре:

3. $W\big|_{\hat{r}} = 1$; $\dfrac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\hat{r}} = 0$; (2.14)

Условие равновесия элемента жесткого ядра течения

4. $\check{S} \cdot \partial p \big| \partial z \big|_{\hat{r}} = K_0 \cdot \check{I}$ (2.15)

Здесь: $\check{S}$ – площадь поперечного сечения ядра течения,

$\check{I}$ – длина периметра поперечного сечения ядра течения,

K_0 – предел пластичности материала, $\hat{V}$ – скорость движения стенки трубы.

Выше перечисленных условий на $\hat{\Gamma}$ и $\overset{v}{\Gamma}$ достаточно для определения постоянных интегрирования и определения неизвестной заранее границы $\breve{\Gamma}$ жесткого ядра течения.

Далее воспользуемся методом возмущений решения задачи о течении вязкопластического материала в трубопроводе [72,78,113,128].

Уравление в частных производных (2.10) имеет 4-й порядок производных, является сингулярно возмущенным, по главной своей части при $\delta = 0$ является управлением 2-го порядка эллитического типа..

Вместе с граничными условиями (2.12-2.14) задача (2.10) содержит два малых параметра – δ и ε, которые содержатся в уравнении (2.10) и в граничных условиях.

Правомерным является представление решения задачи в виде ряда по двум малым параметрам δ и ε [105,113,128,49,100]:

$$W(\varepsilon,\theta,\delta,\varepsilon) = W^0(\varepsilon,\theta) + W^1(\varepsilon,\theta)\cdot\delta + W^2(\varepsilon,\theta)\cdot\delta^2 + W^2(\varepsilon,\theta)\cdot\varepsilon... \qquad (2.16)$$

Далее ограничимся только этими тремя членами степенного ряда по δ, ε.

Подставляя решение для $W(\varepsilon,\theta,\delta,\varepsilon)$ в виде (2.16) в уравнение (2.10) и граничное уравнение (2.12-2.14) построим приближение нулевого и первого порядков по малым параметрам.

2.2 Построение внешнего разложения по малым параметрам δ^2 и ε для скорости течения W

2.2.1 Дифференциальные уравнения для членов разложения скорости

Положим $W(v,\theta,\delta,\varepsilon) = W^0(v,\theta,0,0) + \delta^2 W^\delta(v,\theta,0,0) + \varepsilon W^\varepsilon(v,\theta,0,0)$ (2.17)

Подставим разложение (2.17) в уравнение (2.10) и, приравнивая к нулю коэффициенты при δ^2, ε и слагаемые, не содержащие δ^2 и ε, получим уравнения в частных производных для разложения (2.17) [39].

$$\frac{\partial^2 W^0}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial^2 W^0}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial W^0}{\partial \xi}=-q^2; \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 W^\delta}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial^2 W^\delta}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial W^\delta}{\partial \xi}=P^\delta; \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}P^\delta=&-\frac{1}{12}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial^2 W^0}{\partial\xi^2}\right)+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial^3 W^0}{\partial\xi\partial\theta^2}\right]\right\}-\\&-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial^2 W^0}{\partial\xi^2}\right)+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial^3 W^0}{\partial\xi\partial\theta^2}\right]\right\}-\\&-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\xi^3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial^2 W^0}{\partial\xi^2}\right)+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial^3 W^0}{\partial\xi\partial\theta^2}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 W^\varepsilon}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{\partial^2 W^\varepsilon}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi}=0. \tag{2.20}$$

Трансформируем граничные условия (2.12-2.14), заданные для точного решения $W(\xi,\theta,\delta,\varepsilon)$ уравнения (2.10), к приближенным задачам, описываемым уравнениями (2.18-2.20) для W^0, W^δ и W^ε.

2.2.2. Представление эллиптической границы в виде степенного ряда по малому параметру ε-эксцентриситету

Зададим в параметрическом виде уравнение контура поперечного сечения трубы эллиптической формы:

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad \text{где}\quad \begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases} \tag{2.21}$$

В прямоугольных координатах $(0xy)$ получим уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2.22}$$

В полярных координатах уравнение эллипса принимает вид:

$$r^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$$

или

$$r^2 = \frac{b^2}{1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2}\cos^2\theta}$$

или

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta} \qquad (2.23)$$

где $e = \pm\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}}$ - эксцентриситет, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, $a > b$.

В безразмерном виде при $b = R$ получим $\xi^2 = \frac{1}{1 - e^2\cos^2\theta}$.

Далее, вследствие симметрии границ Г эллипса по x и y, будем рассматривать течение только в первой четверти ($x \geq 0, y \geq 0$) системы координат, а само поперечное сечение будем считать мало отличающимся от круга, т.е. эксцентриситет e будем считать за малый параметр ε.

Для формулировки граничных условий (2.12-2.14) для соответствующих слагаемых разложения W^0, W^δ, W^ε представим уравнение контура поперечного сечения трубы в линейном приближении по ε^2:

$$r = \sqrt{\frac{b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\theta}} \approx b + \varepsilon^2\frac{1}{2}b\cos^2\theta + ... = b(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}b\cos^2\theta) + ... \quad (2.24)$$

В безразмерном виде приближённое уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{r}{R} = \frac{r}{b} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\theta + ... \qquad (2.25)$$

2.2.3 Формулировка граничных условий в нулевом и первых приближениях разложения решения для скорости $W(v,\theta,\delta,\varepsilon)$ в форме степенного ряда по двум параметрам δ и ε.

Отметим прежде всего, что малые безразмерные параметры δ и ε содержатся не полностью в уравнениях и в граничных условиях – параметр δ содержится явно только в дифференциальных уравнениях, а параметр ε содержится явно только в задании границы Γ. То обстоятельство, что малый параметр ε содержится в определении формы границы Γ и $\breve{\Gamma}$, требует разложения в ряд по ε и самой границы Γ и $\breve{\Gamma}$.

В безразмерной форме внешняя граница Γ поперечного сечения трубы имеет вид

$$\xi = \frac{v}{R} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\theta \ , \quad (\ \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \ ). \tag{2.25}$$

Так что разложение в ряд функции $W(\xi)$, где $\xi = \frac{v}{R} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2\theta$ содержит следующие слагаемые

$$W(\xi)\Big|_{\Gamma} = W^0\Big|_{\xi=1} + \frac{\partial W^0}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1}\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon^2}\cdot\varepsilon^2 + W^{\varepsilon}\Big|_{\xi=1}\varepsilon^2 + W^{\delta}\Big|_{\xi=1}\delta .$$

Представим разложение по δ и ε первого граничного условия прилипания материала к стенке трубы:

$$W\Big|_{\breve{\Gamma}} = V \ ;$$

$$\begin{cases} W^0(\xi,\theta,0,0)\Big|_{\xi=1} = V; \\ W^{\delta}(\xi,\theta,0,0)\Big|_{\xi=1} = 0; \\ W^{\varepsilon}(\xi,\theta,0,0)\Big|_{\xi=1} = \dfrac{\partial W^0}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1}\cdot\dfrac{1}{2}\cos^2\theta. \end{cases} \tag{2.26}$$

Разложение в ряд по δ и ε второго граничного условия качения представительного элемента вдоль стенки Γ трубы приводит к следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\Gamma} - \gamma \dfrac{\partial^2 W}{\partial n^2}\Big|_{\Gamma} = 0; \\ \dfrac{\partial W^0}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1} - \gamma \dfrac{\partial^2 W^0}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=1} = 0; \\ \dfrac{\partial W^\delta}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1} - \gamma \dfrac{\partial^2 W^\delta}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=1} = 0; \\ \dfrac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1} - \gamma \dfrac{\partial^2 W^\varepsilon}{\partial \xi^2}\Big|_{\xi=1} = -\left(\dfrac{\partial W^0}{\partial \xi} - \gamma \dfrac{\partial^2 W^0}{\partial \xi^2} \right)\Big|_{\xi=1} \dfrac{1}{2}\cos^2\theta. \end{cases} \tag{2.27}$$

Приведем разложение в ряд по δ и ε третьего граничного условия:

$$W\big|_{\breve{\Gamma}} = 1; \qquad \frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\breve{\Gamma}} = 0.$$

$$\begin{cases} W^0\big|_{\breve{\xi}^0} = 1; \\ W^\delta\big|_{\breve{\xi}^0} = -\left[\dfrac{\partial W^0}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial n} + \dfrac{\partial W^0}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right]\Big|_{\breve{\xi}^0} \cdot \dfrac{\partial n}{\partial \delta}\Big|_{\breve{\xi}^0}; \\ W^\varepsilon\big|_{\breve{\xi}^0} = -\left[\dfrac{\partial W^0}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial n} + \dfrac{\partial W^0}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right]\Big|_{\breve{\xi}^0} \cdot \dfrac{\partial n}{\partial \varepsilon}\Big|_{\breve{\xi}^0}. \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W^0}{\partial \xi}\Big|_{\breve{\xi}^0} = 0; \\ \dfrac{\partial W^\delta}{\partial \xi}\Big|_{\breve{\xi}^0} = -\left(\left[\dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial n} + \dfrac{\partial}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right] \left(\dfrac{\partial W^0}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial n} + \dfrac{\partial W^0}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right) \right)\Big|_{\breve{\xi}^0} \cdot \dfrac{\partial n}{\partial \delta}\Big|_{\breve{\xi}^0}; \\ \dfrac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi}\Big|_{\breve{\xi}^0} = -\left(\left[\dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial n} + \dfrac{\partial}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right] \left(\dfrac{\partial W^0}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial n} + \dfrac{\partial W^0}{\partial \theta} \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial n} \right) \right)\Big|_{\breve{\xi}^0} \cdot \dfrac{\partial n}{\partial \varepsilon}\Big|_{\breve{\xi}^0}. \end{cases} \tag{2.29}$$

Приведенные разложения третьего граничного условия (2.29) значительно упрощаются далее, так как граница $\breve{\Gamma}$ внутреннего контура

жесткого ядра $\xi = \xi^0 = const$ не зависит от малых параметров δ и ε, а следовательно $\frac{\partial n}{\partial \delta}\Big|_{\xi^0}$ и $\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\Big|_{\xi^0}$ будут равны нулю:

$$\frac{\partial n}{\partial \delta}\Big|_{\xi^0} = \frac{\partial n}{\partial \theta}\Big|_{\xi^0} = 0$$

и все правые части выражений (2.29) будут равны нулю:

$$W^0\Big|_{\breve{\xi}^0} = 1; \quad W^\delta\Big|_{\breve{\xi}^0} = 0; \quad W^\varepsilon\Big|_{\breve{\xi}^0} = 0; \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial W^0}{\partial \xi}\Big|_{\breve{\xi}^0} = 0; \quad \frac{\partial W^\delta}{\partial \xi}\Big|_{\breve{\xi}^0} = 0; \quad \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi}\Big|_{\breve{\xi}^0} = 0; \tag{2.31}$$

Проведем разложение в ряд по малым параметрам δ и ε четвертого граничного условия:

$$\breve{S} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}\Big|_{\breve{\Gamma}} \quad . \quad K_0 \ .$$

Пусть уравнение контура $\breve{\Gamma}$ представлено в виде ряда по δ и ε в форме

$$\xi = \xi(\theta) = \breve{\xi}^0(\theta) + \breve{\xi}^\delta(\theta) \cdot \delta^2 + \breve{\xi}^\varepsilon(\theta) \cdot \varepsilon^2 + \ldots \quad , \tag{2.32}$$

а граничное условие в безразмерном виде запишем так:

$$\frac{\breve{S}}{\breve{l}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{P}{K_0}\right)}{\partial \xi} = 1 \text{ , здесь } \xi = \frac{z}{R} . \tag{2.33}$$

В нулевом приближении получим:

$$\breve{l}^0 = 2\pi\breve{\xi}; \quad \breve{S}^0 = \pi\breve{\xi}^2; \quad \frac{\breve{S}^0}{\breve{l}^0} = \frac{1}{2}\breve{\xi}^0 .$$

Дальнейшее уточнение $\breve{\xi}^\delta$ и $\breve{\xi}^\varepsilon$ можно будет провести только за счет третьего граничного условия – уточнения скорости W и уточнения границы Γ.

2.2.4 Приближение пограничного слоя нулевого порядка.

Построим приближенное решение задачи течения микроструктурного материала вблизи стенки трубопровода, для чего проведем растяжение координаты ξ в несколько раз вблизи стенки $\xi = 1$. Целью такого растяжения является сохранение в уравнении движения (2.10) производных 4-го порядка по ξ -т.е. величин $\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}$.

2.2.4.1 Пограничный слой в линейном приближении.

Положим $\xi = \eta \cdot \delta^2 + 1,$ (2.34)

т.е. $\eta = \frac{(\xi - 1)}{\sqrt{\delta}}$ - так что граница стенки $\xi = 1$ в координатах η переходит в точку $\eta = 0$.

Произведем замену координаты ξ и производных по ξ через η.

$$\xi = 1 + \eta\sqrt{\delta}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta}}; \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{\delta};$$
$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \cdot \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}}; \quad \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} = \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \cdot \frac{1}{\delta^2}. \tag{2.35}$$

При такой замене координаты ξ на координату η уравнение (2.10) движения – для скорости W преобразуется:

$$\frac{1}{\delta}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}+\frac{\delta^2}{12}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\left(\frac{1}{1+\eta\sqrt{\delta}}\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(1+\eta\sqrt{\delta})\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}+\frac{\delta}{1+\eta\sqrt{\delta}}\cdot\frac{\partial^3 W}{\partial\eta\partial\theta^2}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{(1+\eta\sqrt{\delta})^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}+\frac{\delta^2}{12}\cdot\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{(1+\eta\sqrt{\delta})}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{1+\eta\sqrt{\delta}}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left((1+\eta\sqrt{\delta})\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{(1+\eta\sqrt{\delta})}\cdot\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)\right)\right]+\frac{\delta}{(1+\eta\sqrt{\delta})^2}\frac{\partial^3 W}{\partial\theta^3}\right\}+ \qquad (2.36)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\delta}(1+\eta\sqrt{\delta})}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}+\frac{\delta^2}{12}\cdot\frac{1}{(1+\eta\sqrt{\delta})^3}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left((1+\eta\sqrt{\delta})\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}\right)+\\ +\frac{1}{(1+\eta\sqrt{\delta})}\cdot\frac{1}{\sqrt{\delta}}\cdot\frac{\partial^3 W}{\partial\eta\partial\theta^2}\end{array}\right]=-q^2.$$

При $\delta\to 0$ построенное уравнение в растянутой координате η принимает вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\eta^2}=0. \qquad (2.37)$$

Решением такого уравнения (2.37) является линейное распределение скорости $W(\eta)$ в пограничном слое:

$$W(\eta)=c_5+c_6\eta \qquad (2.38)$$

где $c_5=0$ в силу условия прилипания материала к стенке трубы при $\eta=0$

$$W(0)=0 \qquad (2.39)$$

Постоянная c_6 определяется из условия совпадения скорости внешнего разложения на стенке трубы $W^0(\xi)\big|_{\xi=1}=W^0(1)$ скорости в ограниченном слое на границе $\eta=\eta^0$ пограничного слоя, при этом граница η^0 пограничного слоя остается неопределенной:

$$W^0(1)=W(\eta)\big|_{\eta=\eta_0}=c_6\eta_0 \qquad (2.40)$$

откуда $c_6=\dfrac{W^0(1)}{\eta_0}$ и скорость в пограничном слое определяется:

$$W(\eta) = W^0(1) \cdot \frac{\eta}{\eta_0} \tag{2.41}$$

где $W^0(1) = 1 + \frac{1}{2} q^2 \left[(\gamma + 1) \ln\left(\frac{e}{2(\gamma + 1)} \right) - \frac{1}{2} \right]$.

2.2.4.2 Пограничный слой в нелинейном приближении

Рассмотрим более сильное растяжение координаты ξ, положив $\xi = \zeta \cdot \delta + 1$ и проведя замену производных по ξ через производные по ζ, построим уравнение для W [121,122,176] :

$$\begin{gathered} \xi = \zeta \cdot \delta + 1; \\ \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{\delta}; \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{1}{\delta^2}; \\ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} \cdot \frac{1}{\delta^3}; \quad \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} = \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} \cdot \frac{1}{\delta^4} \end{gathered} \tag{2.42}$$

Уравнение в частных производных (2.10) преобразуется в дифференциальное уравнение в производных по ζ и θ:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + \frac{\delta^2}{12} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left\{ \frac{1}{1 + \delta\zeta} \left[\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((1 + \delta\zeta) \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1}{1 + \delta\zeta} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \theta^2} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{(1 + \delta\zeta)^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\delta^2}{12} \cdot \frac{1}{1 + \delta\zeta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{1}{1 + \delta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left((1 + \delta\zeta) \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{1 + \delta\zeta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right) + \frac{1}{(1 + \delta\zeta)^2} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3} \right\} + \frac{1}{1 + \delta\zeta} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial W}{\partial \zeta} + \\ + \frac{\delta^2}{12} \cdot \frac{1}{(1 + \delta\zeta)^3} \left[\frac{1}{\delta^3} \cdot \frac{\delta}{\delta\zeta} \left((1 + \delta\zeta) \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{1}{1 + \delta\zeta} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \zeta \partial^2 \theta} \right] = -q^2 \end{gathered} \tag{2.43}$$

При $\delta \to 0$ уравнение (43º) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка с производными по растянутой координате $\zeta = |\xi - 1| \delta$

$$\frac{1}{12} \frac{\partial^4 W}{\partial \zeta^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = 0 \ . \tag{2.44}$$

Двукратное интегрирование уравнения (2.44) приводит его к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с правой частью:

$$\frac{1}{12}W'' + W = c_7 + c_8\zeta \quad . \tag{2.45}$$

общее решение уравнения (2.45) имеет вид:

$$W_{\text{î áù}} = \tilde{n}_9 sin\sqrt{12}\zeta + c_{10}cos\sqrt{12}\zeta \ . \tag{2.46}$$

Частное решение уравнения (2.45) будем искать в виде:

$$\mathrm{W}_{\text{÷àñò}}(\zeta) = A + B\zeta \ . \tag{2.47}$$

Подстановка вида решения (2.47) в уравнение (2.45) дает уравнение для определения постоянных A' и В: $A' + \hat{A}\zeta = c_7 + c_2$,

так что $A = c_7, B = c_8$.

Тогда полное решение уравнения (2.44) для распределения скорости $W(\zeta)$ в пограничном слое определяется с точностью до постоянных:

$$W(\zeta) = c_7 + c_8\zeta + c_9 sin\sqrt{12}\zeta + c_{10}\cos\sqrt{12}\zeta \quad . \tag{2.48}$$

Граничные условия поставим при $\zeta = 0$ и $\delta \to 0$:

$$W(0) = 0 \quad \text{и} \quad \gamma\frac{\partial^2 W}{\partial\zeta^2}\Big|_{\zeta=0} = 0 \quad . \tag{2.49}$$

Получим $c_7 + c_{10} = 0$, $c_{10}\gamma \cdot 12 = 0$.

Так что $\tilde{n}_7 = -\tilde{n}_{10}$, $\tilde{n}_{10} = 0$ (2.50)

$$W(\zeta) = c_8\zeta + c_9 Sin\sqrt{12}\zeta \quad . \tag{2.51}$$

Постоянные c_8 и c_9 определим из условия сращивания внешнего разложения $W^0(\xi)$ при $\xi \to$ 0 на стенке трубы с решением $W(\zeta)$ при $\zeta \to \zeta_0$ на границе пограничного слоя и условия ограниченности решения в пограничном слое при $\zeta \to \infty$.[18,73,113]

Получим $c_8 = 0$ за счет ограниченности $W(\zeta)\big|_{\zeta\to\infty} < const$.

$$W^0(\xi)\big|_{\xi=1} = W^0(1) = W(\eta)\big|_{\eta=0} \quad . \tag{2.52}$$

Тогда получим $c_9 = \dfrac{W^0(1)}{sin\sqrt{12}\zeta_0}$.

Наибольшую толщину ζ_0 пограничного слоя удобно выбрать из условия наибольшей скорости, то есть из условия $sin\sqrt{12}\zeta_0 = 1$, что дает нам толщину пограничного слоя $\zeta_0 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{12}}$.

Таким образом, в нулевом приближении распределение скорости $W(\zeta)$ $(\zeta = \zeta_0)$ в пограничном слое имеет вид:

$$W(\zeta) = \frac{W^0(1) \cdot sin\left(\sqrt{12}\zeta\right)}{Sin\sqrt{12}\zeta_0}, \tag{2.53}$$

где $\zeta \in [0, \zeta_0]$, $\zeta_0 = \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

На рис. 2.4 представлены графики поведения скорости течения МВПМ в пограничном слое.

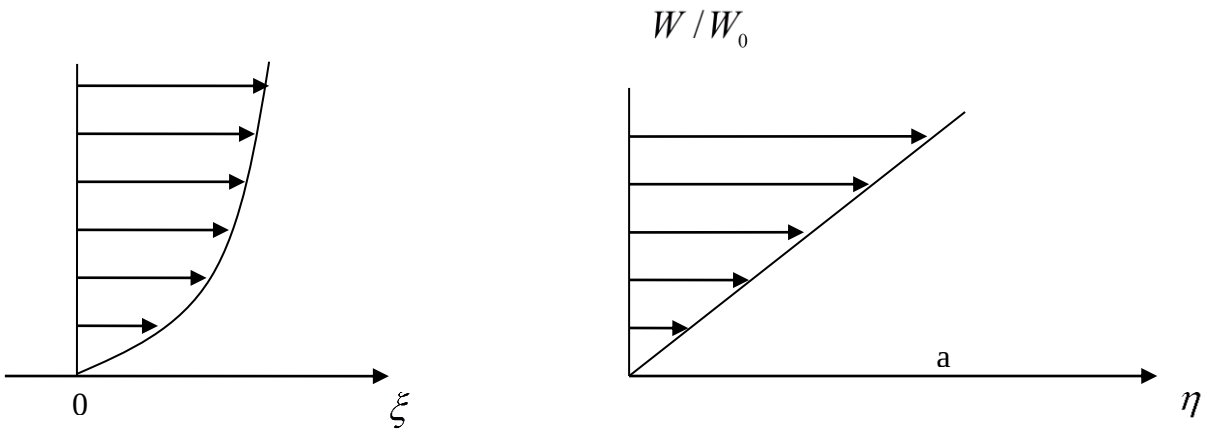


Рис.2.4. График скорости в пограничном слое:

а) в линейном приближении (2.41);

в) в нелинейном приближении (2.53).

2.2.5 Возможность проскальзывания ядра течения относительно основного течения

2.2.5.1 Приближение нулевого порядка $W^0(\xi)$ для внешнего разложения скорости $W^0(\xi,\theta,\delta,\varepsilon)$ в условиях скольжения на границе трубы

Нулевое приближение W^0 для $W(\xi,\theta,\delta)$ определяется дифференциальным уравнением второго порядка (2.18), содержит две постоянные интегрирования c_1 и c_2. Это решение (2.60) не может удовлетворить всем четырём граничным условиям. Таким образом, нам предстоит самим выбирать такие два граничных условия, которые позволили бы ввести пограничные слои в качестве внутреннего разложения на границе трубы $\xi = \xi = 1$. В качестве таких граничных условий выберем условия (2.14) на ядре течения, границу которого $\xi = \breve{\xi}$ предстоит найти.

Найдем постоянные c_1, c_2 и границу ядра, исходя из условий (2.12-2.14):

$$\left.\frac{dW^0}{d\xi}\right|_{\xi} = \frac{c_1}{\xi} - \frac{1}{2}q^2\xi = 0\,;\ \xi\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| = K_0\,;\ \left|\frac{\partial p}{\partial z}\right| = q^2\,\frac{\mu V_0}{R_0^2}\,. \tag{2.54}$$

$$\text{Получим:}\, c_1 = \frac{1}{2}q^2\xi^2;\quad \breve{\xi} = \frac{K_0}{\left|\partial p/\partial z\right|};\, q^2 = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{R_0^2}{V_0}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\,. \tag{2.55}$$

Условие скольжения материала (2.13) вдоль стенки трубы при $\breve{\xi} = 1$ ($w' - \gamma w'' = 0$) позволяет найти единственное значение постоянной $C_1 = \left(q^2/2\right)\left(1-\gamma\right)/\left(1+\gamma\right)$, которое может выполняться лишь при одном перепаде давлений $\left(\partial p/\partial z\right) \approx K_0$, доставляющим радиусу $\breve{\xi}$ ядра течения значение $\breve{\xi}\sqrt{1 - 2\gamma/\left(1+\gamma\right)} \approx 1-\gamma$. При этом скорость ядра остаётся неопределённой, т.к. постоянная C_2 не определяется, что соответствует предельному равновесию материала в трубе в состоянии покоя.

Условие качения микроструктуры вдоль стенки трубы $\left(w^0 - \gamma w^{o\prime}\right)_{\xi=1} = 0$ допускает развитое течение материала в трубе

$$\breve{\xi} = K_0/(\partial p/\partial z)\ ;\ C_1 = \frac{1}{2}q^2 \cdot \breve{\xi}^2;\ C_2 = \frac{1}{2}q^2\left(\frac{1}{2} - \gamma + \gamma\breve{\xi}^2\right); \tag{2.56}$$

$$w^0(\xi) = \frac{1}{4}q^2\left(-\xi^2\right) - \gamma\frac{1}{2}q^2\left(-\breve{\xi}^2\right) + \frac{1}{2}q^2\breve{\xi}^2\ln\xi + \frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{2}\gamma\ . \tag{2.57}$$

Последнее распределение скорости течение (2.57) позволяет найти скорость проскальзывания материала на стенке $\xi = 1$ $w^0(1)$ и скорость ядра $w^0\left(\breve{\xi}\right)$

$$w^0(1) = -\frac{1}{2}q^2\gamma\left(1 - \breve{\xi}^2\right)\ ; \tag{2.58}$$

$$w^0\left(\breve{\xi}\right) = w'^0 = -\frac{1}{2}q^2\left[\left(1 - \breve{\xi}^2\right)\left(-\frac{1}{2} + \gamma\right) - \breve{\xi}^2\ln\breve{\xi}\right] \tag{2.59}$$

Из последних выражений следует что величина скорости проскальзывания определяется характерным размером микроструктуры, а скорость ядра течения увеличивается на величину порядка характерного размера микроструктуры, по сравнению с течением при условии прилипания материала к стенкам трубы. График скорости течения МВПМ в круглой трубе в условиях скольжения вдоль стенки трубы приведен на Рис. 2.5

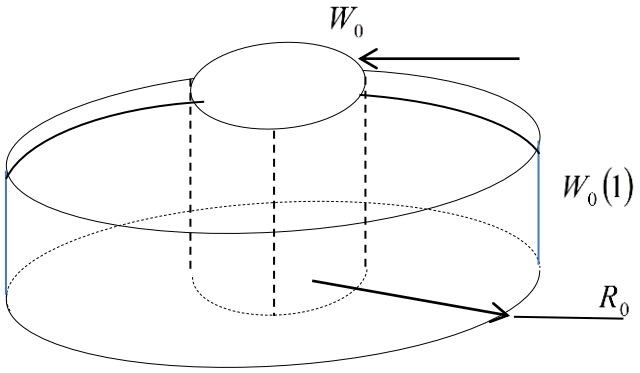


Рис. 2.5. Схематическое изображение скорости течения материала в виде поверхности с плоской верхушкой над ядром течения.

2.2.5.2 Течение микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрической трубе в условиях прилипания материала к стенкам трубы.

В нулевом приближений разложения решения обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего скорость течения микроструктурного вязкопластического материала в круглой трубе, имеет вид [37,42,138,139,140]

$$W^0(\xi) = -\frac{q^2}{4}\xi^2 + C_1 \ln \xi + C_2 \qquad (2.60)$$

и при наличии жёсткого ядра течения (Рис 2.6) граничные условия зададим на контуре трубы $r = R_0$, на границе ядра течения $r = \breve{r}$ и баланс сил на единичном отрезке ядра течения

$$W(1) = 0;\ \frac{\partial W(\breve{\xi})}{\partial \xi} = 0;$$

$$W(\breve{\xi}) = -W_0;\ \pi\breve{\xi}^2 \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 2\pi\breve{\xi} \cdot K_0\ . \qquad (2)$$

Здесь : $\xi = r/R_0$; K_0 – предел пластичности материала.

Подставляя (2.60) в граничные условия (2.61) получим систему уравнений для определения C_1, C_2, $\breve{\xi}$ и W_0.

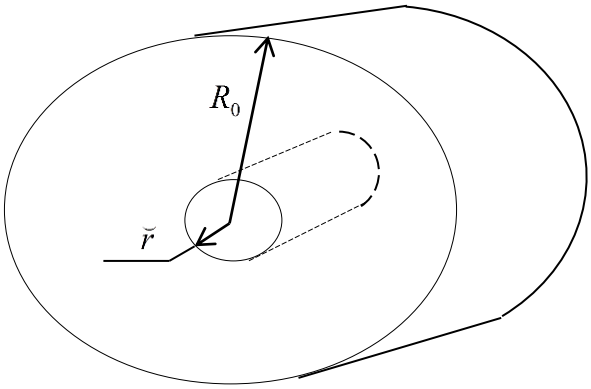


Рис. 2.6. Схематическое изображение области течения материала в круглой трубе с выделением жёсткого ядра течения.

$$-\frac{q^2}{4}+C_2=0 \;;$$

$$-{q^2}/{4}\cdot\breve{\xi}^2+C_1\ln\breve{\xi}+C_2=W_0 \;; \qquad (2.62)$$

$$-{q^2}/{2}\,\breve{\xi}+\frac{1}{\breve{\xi}}\cdot C_1=0 \;;$$

$$\breve{\xi}\frac{\partial p}{\partial z}=2K_0.$$

Из (2.62) находятся неизвестные постоянные C_1, C_2, $\breve{\xi}$ и W_0

$$C_1=\frac{2K_0q^2}{(\partial p/\partial z)^2}\;;\; C_2=\frac{q^2}{4}\;;\; \breve{\xi}=\frac{2K_0}{\partial p/\partial z}\;;$$

$$W_0^0=W(\breve{\xi})=\frac{q^2}{4}\left(1-\left(\frac{K_0}{\partial p/\partial z}\right)^2\cdot\ln(e\breve{\xi})\right) \qquad (2.63)$$

сама скорость $W_0(\xi)$в области течения $\xi\in[\breve{\xi},1]$ имеет вид

$$W_0(\xi)=\frac{q^2}{4}(1-\xi^2)+2\left(\frac{K_0q}{\partial p/\partial z}\right)^2\ln\xi. \qquad (2.64)$$

На рис 2.7 представлен пространственное распределение скорости течения материала в трубе в виде поверхности с плоским верхом.

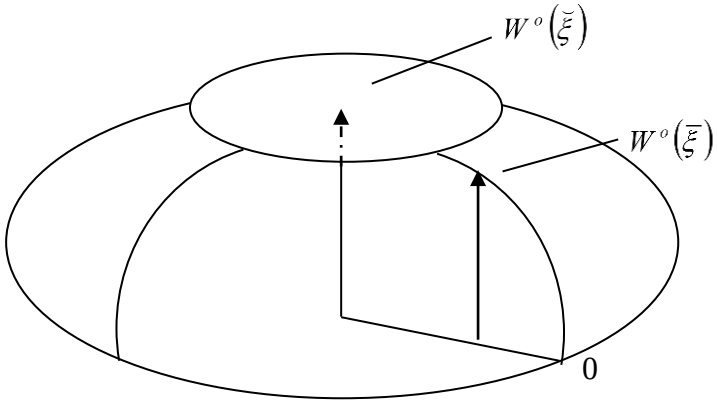


Рис. 2.7. Распределения скорости течения материала в трубе

2.2.5.3 Возможность проскальзывания ядра течения относительно основного течения

Известной характерной особенностью стационарного продольного течения вязкопластического материала в круглой трубе является наличие

жёсткого (твёрдого) ядра течения, радиус которого определяется из баланса продольных сил за счет перепада давления $\partial p/\partial z$ и поверхностных сил предельного напряжения $\sigma_{r\vartheta}= K_0[1,2]\ r_0^* = 2K_0(\partial p/\partial z)$ (здесь K_0 – предел пластичности).

На рис.2.8 изображено распределение скорости $w_z(r)$ продольного течения в зависимости от радиуса r, где отмечен факт совпадения скорости w^0 движения ядра течения со скоростью $w(r_0^*)$ движения материала на границе ядра $r = r_0^*$. Характерным моментом течения является факт непрерывности поля скоростей в точке $r = r_0^*$ и безградиентность течения в этой точке $\partial w(r_0^*)/\partial r= 0$, что следует из реологии [147,104-106] вязкопластичность материала.

$$\sigma_{r_z}(r_0^*) = K_0 + \mu\partial w/\partial r = K_0, \qquad \text{т.е. } \partial w(r_0^*)/\partial z = 0 \qquad (2.65)$$

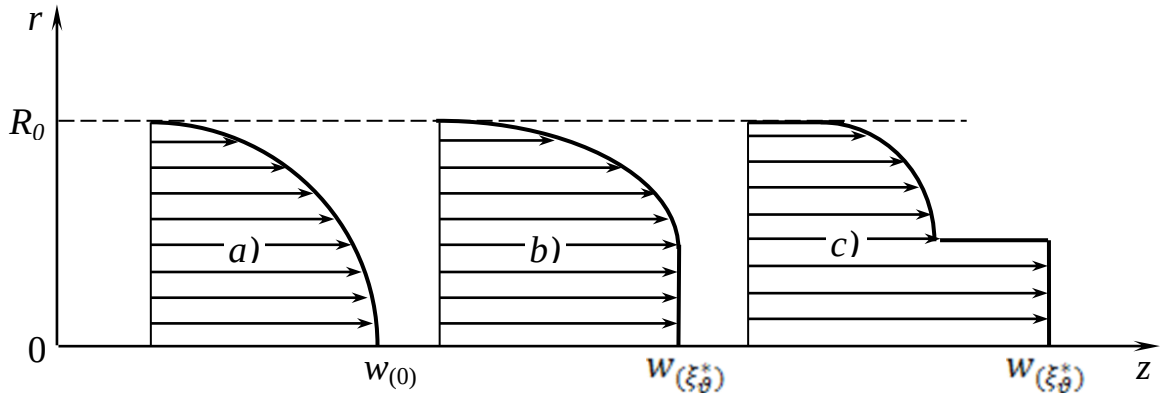


Рис. 2.8. График скорости $w_{(\xi)}$ предельного течения: a) вязкой жидкости; b) вязкопластического материала с наличием твердого ядра течения; *c*) вязкопластического микроструктурного материала с наличием твердого ядра течения и проскальзывание материала на ядре течения и на границе трубы под действием перепада давления $\partial p/\partial z\neq 0$.

Для случая течения вязкопластического материала с учетом его микроструктуры возможно проскальзывание ядра течения относительно основного потока, так что $w^0\neq w(r_0^*)$.

Рассмотрим вязкое течение материала в области между внешним радиусом трубы R_0 и границей ядра течения r_0^*. Скорость течения материала в этой зоне имеет общий вид [72]:

$$w(r) = \frac{q^2}{4}(-\xi^2 + C_1\ell\xi + C_2)\ ; \qquad (2.66)$$

$\xi = r/R_0$;

$q^2 = (1/\mu)\partial p/\partial z R_0^2/V_0$, где μ– коэффициент вязкости.

Условия качения представительного элемента на неподвижной границе трубы $r = R_0$ ($\xi = 1$) и на подвижном ядре течения $\xi = \xi_0^*$ имеют вид [72]:

$$w(\xi_0) - \gamma\frac{dw(\xi_0)}{d\xi} = v^0;$$

$$w_{(1)} + \gamma\frac{dw(1)}{d\xi} = 0. \qquad (2.67)$$

Условия предельного трения на твердой границе ядра течения [55]

$2K_0 + 2\mu\xi_{rt} = 2K_0$, так что $\xi_{rt}(\xi_0) = 0$ дает уравнение для определения скорости течения ядра:

$$\left(\frac{dw}{d\xi} + \delta\frac{d^3w}{d\xi^3}\right)_{\xi=\xi_0^*} = 0. \qquad (2.68)$$

Граничные условия (2.67) позволяют составить систему 2-х уравнений для двух постоянных интегрирования C_1, C_2:

$$-1 + C_2 - 2\gamma + \gamma C_1 = 0;$$

$$-\xi_0^{*2} + c_1\ln\xi_0^* + c_2 + 2\gamma\xi_0^* - \gamma\frac{c_1}{\xi_0^*} = 0 = V_{00} = \frac{4V_0}{q^2}. \qquad (2.69)$$

Из (2.67) следует:

$$C_1 = 2\xi_0^{*4}/\left(\xi_0^{*2} + 2\delta\right);$$

$$C_2 = 1 + 2\gamma - 2\xi_0^{*4}/\left(\xi_0^{*2} + 2\delta\right);$$

$$V_{00} = 4V_0/q^2 = 1 + 2\gamma + 2\xi_0^{*2} - \xi_0^{*2} - 2\gamma\xi_0^{*2}\left(\ln\xi_0^* - 1 - 1/\xi_0^*\right)/\left(\xi_0^{*2} + 2\delta\right). \qquad (2.70)$$

Для случая малых γ и δ на рисунке представлены графики: *a*) скорости ядра в зависимости от его радиуса $\xi_0^* = r_0^* / R_0$; b) линейная часть проскальзывания ядра от потока.

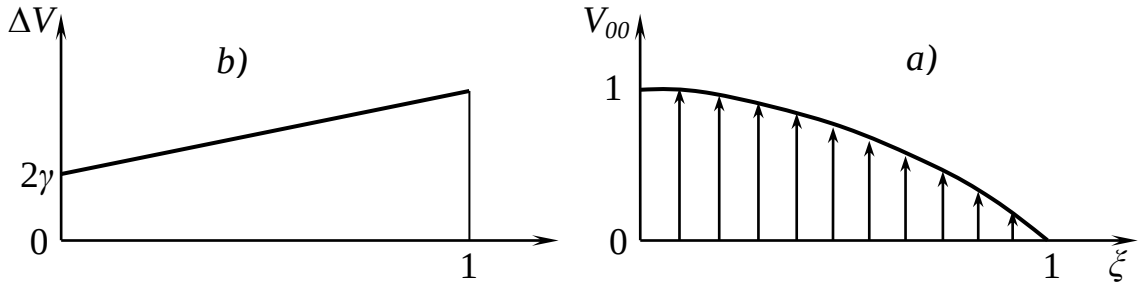


Рис. 2.9. Графики: а) скорости ядра течения $V_{00} \approx 1 - \xi_0^{*2}$ для случая малых γ и δ; *b*) скорости проскальзывания ядра течения над потоком

$\Delta V = V_{00} - w(\xi_0) \cong 2\gamma(1 + \xi_0^*)$

Анализ графиков скорости течения микроструктурного материала в круглой трубе (рис. 2.9) показывает, что микроструктура влияет на форму течения, и возможно проскальзывание твердого течения над потоком вязкой жидкости.

Из приведенного анализа следует вывод, что микроструктура существенно влияет на характер течения в пограничном слое, допускается проскальзывание материала вдоль стенки и тем самым происходит увеличение расхода материала через поперечное сечение трубы.

2.2.6 Построение первого приближения течения материала в эллиптической трубе.

Как следует из постановки задачи определения $w_\varepsilon(\xi,\theta)$ ее решение допускается в виде $w_\varepsilon = v_\varepsilon(\xi)\cos 2\theta$ и сама задача переходит в граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя граничными условиями.

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} V_\varepsilon + \frac{1}{\xi}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \xi} = 0; \quad w_\varepsilon = v_\varepsilon \cdot \cos 2\theta;$$

$$V_\varepsilon(1)=\frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{d\xi}\bigg|_{\xi=1};\ \left(V_\varepsilon+\gamma\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\xi}\right)\bigg|_{\xi=1}=\frac{1}{2}\frac{\partial V_0}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=1}\cdot\cos 2\theta\ \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial\xi}\bigg|_{\xi_0^*}=0 \qquad (2.71)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (2.71) представляет собой уравнение Эйлера, которое имеет точное решение:

$$v_\varepsilon(\xi)=C_1\xi^2+C_2\xi^{-2},$$

граничные условия (2.71) дают систему 2-х уравнений для нахождения постоянных C_1, C_2, так что первое приближение w_ε разложения скорости $w(\xi,\theta)$ в ряд по малому параметру ε представимо в виде:

$$w_\varepsilon(\xi,\theta)=\frac{w_0'(1)\cos 2\theta}{2\left(1+2\gamma+(2\gamma-1)\xi_0^{*4}\right)}\left(\xi^2+\frac{\xi_\partial^{*4}}{\xi^2}\right),$$

здесь $w'(1)=-\frac{q^2}{2}\left(1-\xi_0^*\right).$ (2.72)

Из выражения (2.72) следует, что эллиптичность трубы ведет к уменьшению скорости в области «расширения» поперечного сечения трубы $(\theta=0,\pi)$ и к увеличению скорости течения в область «сужения» трубы $\left(\theta=\pi/2,3\pi/2\right)$.

Уравнение для $w_\delta(\xi,\theta)$, является обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 w_\delta}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial w_\delta}{\partial\xi}=R_\delta \quad ;\left(w_\delta(\xi)+\gamma\frac{dw_\delta(\xi)}{d\xi}\right)\bigg|_{\xi=1}=0;\ \frac{dw_\delta(\xi)}{d\xi}\bigg|_{\xi=\xi_0^*}=0.$$

(2.73)

Уравнение (2.73) допускает точное решение:

$$w_\delta(\xi)=\frac{q^2}{24}\left(-\frac{1}{\xi}-\frac{3}{4}\frac{\xi_\partial^{*2}}{\xi^2}+\frac{1}{9}\frac{\xi_\partial^{*2}}{\xi^3}+\frac{1}{2}\ln^2\xi+C_1\ln\xi+C_2\right), \qquad (2.74)$$

где постоянные интегрирования C_1, C_2 находятся из граничных условий.

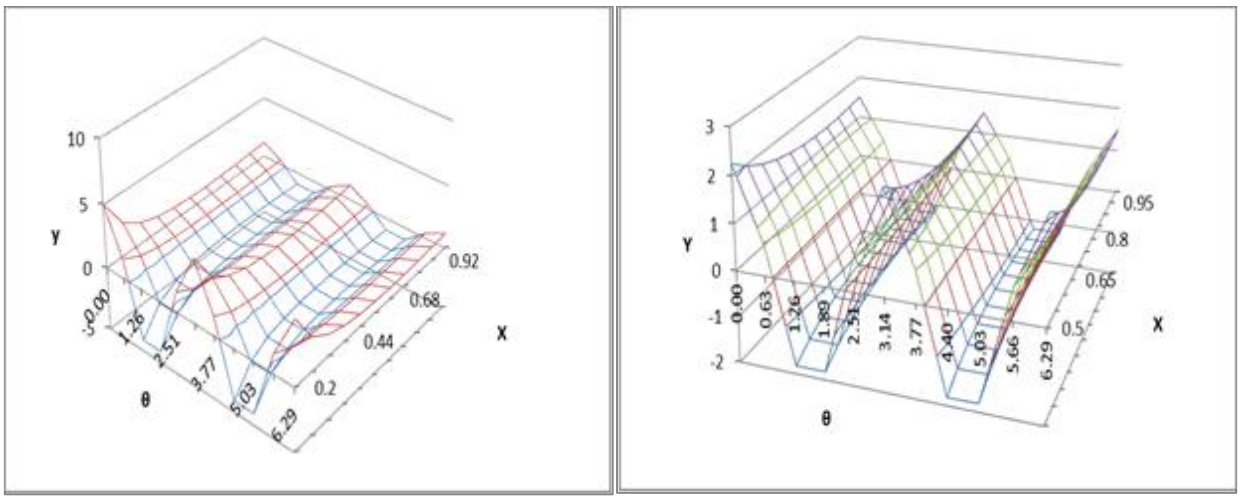


Рис. 2.9. График относительной скорости $w_{\delta}(\xi,\xi_0)$ возмущения течения за счет эллиптичности внешнего контура трубы.

Из приведенных (Рис. 2.9) графиков относительной продольной скорости возмущения течения $w_{\varepsilon}(\xi,\xi_0)$ (2.72) за счёт эллиптичности контура трубы следует:

1. возмущение носит периодически характер с периодом равным π ;
2. амплитуда возмущения $w_{\varepsilon}(\xi,\xi_0)$ скорости течения достигает наибольшего значения на внутренней границе зазора $\xi=\xi_0$;
3. возмущение скорости $w_{\varepsilon}(\xi,\xi_0)$ растёт с увеличением внутреннего радиуса $\xi=\xi_0$ и, следовательно , с уменьшением ширины зазора .

Глава 3 Особенности продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре

3.1 Постановка задачи

Ниже рассматривается осесимметричное течение изучаемого материала в кольцевом зазоре (Рис 3.1) под действием перепада давления $\partial p / \partial z = Const$. Поле скоростей $w(r)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением 4-го порядка, учитывающем вязкость материала и характерный размер $\delta = h / R_o$ микроструктуры [72]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\xi} + \frac{\delta^2}{12}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)\right) + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)\right] = -q^2, \qquad (3.1)$$

здесь: $\xi = r / R_o$; $w = \nu / V_o$; $\delta = h / R$;

$q^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{R_o^2}{V_o}$; r - радиальная координата; R_o - радиус внешнего контура цилиндрической цели; V_o - характерная скорость течения; μ - коэффициент вязкости.

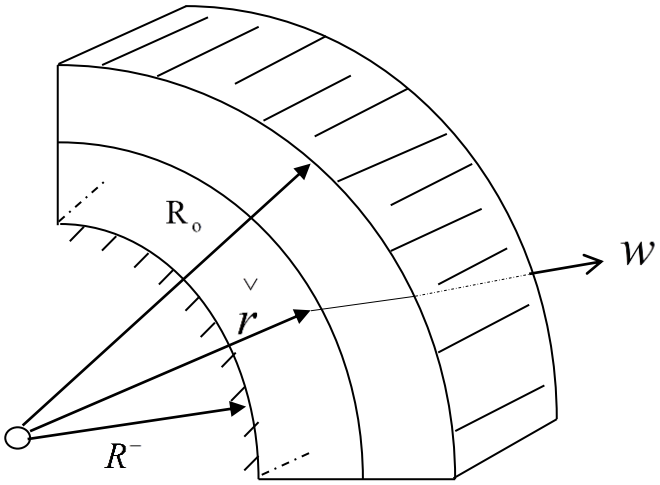


Рис. 3.1. Схематическое изображение цилиндрического зазора с выделением границы $r = \overset{v}{r}$ застойной зоны, гипотетически примыкающей к внутренней $\nu = R^-$ или внешней R_o границам зазора.

Поставим граничные условия для скорости w течения материала на жестких границах и на границе ядра течения (на границе застойной зоны)

$$w(1)=0;\ \left(\frac{dw(\xi)}{d\xi}-\gamma\frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=1}=0; \tag{3.2}$$

$$w(\overset{v}{\xi})=0;\ \frac{dw(\xi)}{d\xi}\Bigg|_{\xi=\overset{v}{\xi}}=0.$$

Условия (3.2) поставлены в предположении, что область $\xi\in\left[\xi^-;\overset{v}{\xi}\right]$ является застойной, а течение материала происходит в области, примыкающей к внешнему контуру $r=R_o$ щели.

Вторая гипотетическая возможность течения состоит в примыкании застойной зоны к внешней границе цилиндрического зазора, так что граничные условия (3.2) должны трансформироваться к виду (3.3)

$$\begin{aligned} &w(\xi^-)=0;\ \left(\frac{d\,w(\xi)}{d\xi}-\gamma\frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2}\right)\Bigg|_{\xi=\xi^-}=0;\\ &w(\overset{v}{\xi})=0,\ \frac{dw(\xi)}{d\xi}\Bigg|_{\xi=\overset{v}{\xi}}=0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Приближенное решение задачи течения вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре при условии полного прилипания материала к стенкам

Точное решение сингулярно возмущенного за счет малого параметра δ линейного обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами (3.1) построить не удается, поэтому воспользуемся методом малого параметра [99,101,105,113,128]. Представим решение для скорости $w(\xi,\delta)$ в виде ряда по параметру δ и ограничимся членами порядка δ^2 не выше [40]

$$w(\xi,\delta)=w^o(\xi)+\delta^2w^1(\xi)+... \tag{3.4}$$

Уравнение (3.1) для члена $w^o(\xi)$ ряда (3.4) упрощается:

$$\frac{d^2 w^o}{d\xi^o} + \frac{1}{\xi}\frac{dw^o}{d\xi} = -q^2. \qquad (3.5)$$

Решение уравнения (3.5) имеет вид:

$$w^o(\xi) = -\frac{q^2}{4}\cdot\xi^2 + C_1 \ln\xi + C_2. \qquad (3.6)$$

Четырех граничных условий (3.2) или (3.3) избыточно для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в (3.6) и неизвестной границы $\xi = \overset{v}{\xi}$ застойной зоны, поэтому необходимо выбрать три из четырех условий и предположить наличие пограничного слоя у стенки, вдоль которой материал движется.

Выбор граничных условий прилипания материала к границам $\xi = 1$ при возможном 2-ом случае течения к границе $\xi = \xi^-$ и условий на границе застойной зоны $\xi = \overset{v}{\xi}$ приводит к невозможности течения, невозможности существования границы ядра течения в области течения.

В самом деле, в случае возможности 1-го варианта течения при граничных условиях (3.2) для определения постоянных C_1, C_2 и границ застойной зоны $\overset{v}{\xi}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &-\frac{q^2}{4} + C_2 = 0; \\ &-(q^2/4)\overset{v}{\xi}^2 + C_1 \ln\overset{v}{\xi} + C_2 = 0; \\ &-\frac{q^2}{2}\overset{v}{\xi} + \frac{C_1}{\overset{v}{\xi}} = 0. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что: $C_2 = q^2/4; C_1 = \frac{q^2}{2}\overset{v}{\xi}^2$, а граница застойной зоны $\xi = \overset{v}{\xi}$ определяется из уравнения $\Phi(\overset{v}{\xi}) = \overset{v}{\xi}^2(2\ln\overset{v}{\xi} - 1) + 1 = 0.$

Графическое исследование (Рис. 3.2) решения этого уравнения показывает, что оно имеет единственное точное решение $\overset{v}{\xi} = 1$, что соответствует застойной зоне, занимающей всю область течения $\xi \in [\xi^-, \xi^+]$,

где $\xi^{+}=1$, т.е. течение в щели при таком выборе граничных условий отсутствует.

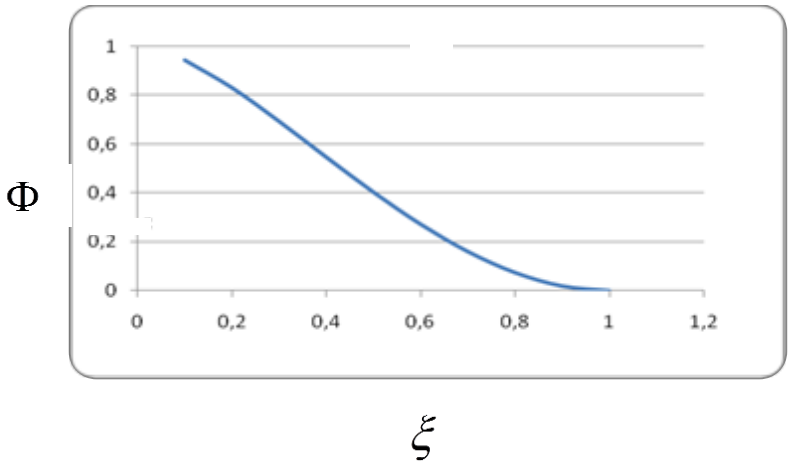


Рис. 3.2 Графическое представление решения уравнения $\Phi\left(\overset{v}{\xi}\right)=0$ для нахождения радиуса $\xi=\overset{v}{\xi}$ застойной зоны.

Аналогичные исследования гипотезы прилипания застойной зоны к внешней границе цилиндрической щели (граничные условия (3.3)), показывают невозможность такой ситуации, т.е. невозможность гипотетического течения (3.3).

Таким образом, в условиях прилипания материала к стенкам цилиндрической щели возможно течение только без образования застойных зон (в нулевом приближении разложения $w(\xi,\delta)$ в степенной ряд) и распределение скорости $w^{p}(\xi)$ имеет вид:

$$w^{0}(\xi)=\frac{q^{2}}{4}\left(1-\xi^{2}-(1-\bar{\xi}^{2})\frac{\ln\xi}{\ln\bar{\xi}}\right) \tag{3.8}$$

$$w^{o}(1)=0;\ w^{o}(\bar{\xi})=0.$$

График распределения скорости $w^{o}(\xi)/\dfrac{q^{2}}{h}$ приведен на рис. 3.3.

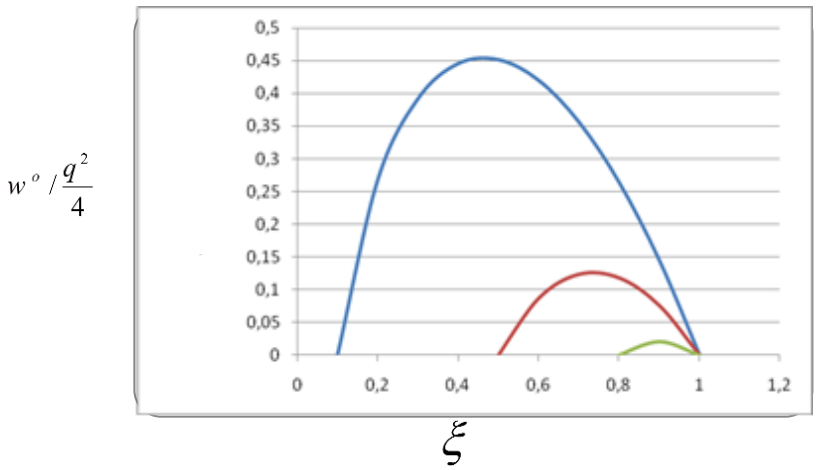


Рис. 3.3. Графическое изображение распределения относительной скорости течения вязкопластического материала в цилиндрическом щелевом зазоре $\xi \in [\breve{\xi};1]$ в условиях полного прилипания материала к стенкам

$$\frac{w^0(\xi)}{q^2/4} = 1 - \xi^2 - (1-\breve{\xi}^2)\frac{\lg \xi}{\lg \breve{\xi}}, \text{ для } \breve{\xi} \in [0{,}1;0{,}5;0{,}9].$$

Уравнение для первого приближения $w^1(\xi)$ получим из (3.1) путем подстановки решения в виде (3.4) и приравнивания к нулю слагаемых при коэффициенте δ^2:

$$\frac{d^2 w^1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dw^1}{d\xi} = P^1(w^o(\xi)), \tag{3.9}$$

где: $P^1(w^0) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}\left(\xi\frac{d^2 w^o}{d\xi^2}\right)\right) - \frac{1}{12}\frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d^2 w^o}{d\xi^2}\right).$

После подстановки выражения (3.8) для $w^o(\xi)$ в (3.9) приведем его к виду

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dw^1}{d\xi}\right) = \frac{q^2}{48}\cdot\frac{1}{\xi}\left(1 - \frac{5}{4}\cdot\frac{1-\bar{\xi}^2}{\ln\bar{\xi}}\cdot\frac{1}{\xi^2}\right) \tag{3.10}$$

при нулевых условиях для $w^1(\xi)$ на границе: $w^1(1) = w^1(\bar{\xi}) = 0.$

Решение уравнения (3.10) для $w^1(\xi)$ имеет вид (3.11)

$$w^1(\xi)=\frac{q^2}{48\cdot 2}\left[\ln^2\xi+\frac{5}{48}\frac{1}{\xi^6}\frac{1-\bar{\xi}^2}{\ln\bar{\xi}}\right]+C_3\ln\xi+C_4 \quad . \qquad (3.11)$$

здесь постоянные C_3 и C_4 определяются из нулевых граничных условий:

$$C_3=-\frac{q^2}{24}\left(\frac{1}{2}(\ln\xi)^2+\frac{5}{96}\frac{1-\bar{\xi}^2}{\ln\bar{\xi}}\left(\frac{1}{\bar{\xi}^6}-1\right)\right);\ C_4=\frac{5}{96\cdot 12}q^2\cdot\frac{\bar{\xi}^2-1}{\ln\bar{\xi}}\ . \qquad (3.12)$$

Таким образом, скорость течения $w(\xi;\delta)$ в приближении с учетом слагаемых порядка δ^2 имеет вид:

$$w(\xi,\delta)=\frac{q^2}{4}\left(1-\xi^2-\left(1-\bar{\xi}^2\right)\frac{\ln\xi}{\ln\bar{\xi}}\right)+\delta^2\cdot W^1(\xi). \qquad (3.13)$$

Гипотеза полного прилипания материала к стенкам зазора и отсутствие «качения» представительного объема вдоль границ приводят к слабому влиянию микроструктуры на скорость течения (3.13), где добавки с параметром δ^2 имеют порядок δ^2, что приводит к выводу, что основное влияние микроструктуры сосредоточено в пограничном слое и в условиях, связанных с «качением» представительного элемента вдоль границы.

3.3 Течение вязкопластического микроструктурного материала в цилиндрическом зазоре при условии проскальзывания на границах щели и наличия пограничного слоя.

Учет влияния микроструктуры на течение вблизи границы щели приводит к появлению кинематического пограничного слоя толщиной Δ, на внутренней границе которого материал прилипает к границе щели, т.е. V(1)=0 или V($\bar{\xi}$)=0, а на внешней границе должно быть проведено сращивание внешнего решения с решением в пограничном слое. Такой подход при малых Δ требует выполнения условия проскальзывания на границе пограничного слоя щели [35,43]:

$$\frac{d\,W\,(1)}{d\,\xi}-\gamma\frac{d^2W\,(1)}{d\,\xi^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{dW\,(\bar{\xi})}{d\,\xi}-\gamma\frac{d^2W\,(\bar{\xi})}{d\,\xi^2}=0. \qquad (3.14)$$

Исследуем возможность течения материалов в цилиндрической щели при условии проскальзывания на внешней границе щели $\xi=1$ и образования застойной зоны на внутренней границе щели $\xi=\check{\xi}$

$$\frac{dW(1)}{d\xi}-\gamma\frac{d^2W(1)}{d\xi^2}=0\,;W(\check{\xi})=0;\ \frac{dW(\check{\xi})}{d\xi}=0. \qquad (3.15)$$

Для решения задач течения материала в области $\xi\in\left[\check{\xi},1\right]$ найдем постоянные интегрирования C_1, C_2 представления скорости $W(\xi)$ в виде (3.6) из условий (3.15)

$$W(\xi)=-\frac{q^2}{4}\cdot\xi^2+C_1\ln\xi+C_2\,;$$

$$-q^2/2+C_1+\gamma(q^2/2+C_1)=0\,;\ -\frac{q^2}{2}\check{\xi}^2+C_1\ln\check{\xi}+C_2=0\,; \qquad (3.16)$$

$$-q^2/2\check{\xi}+C_1/\check{\xi}=0.$$

Из граничных условий (3.16) следует:

$$C_1=q^2\check{\xi}^2\,;C_2=\frac{q^2}{2}\left(\check{\xi}^2-2\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ln\check{\xi}\right);\ \check{\xi}=\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}\ . \qquad (3.17)$$

На рис. 3.4. представлен график зависимости безразмерной границы $\check{\xi}=\frac{\check{r}}{R_0}=\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}$ от параметра $\gamma<0$ граничного условия проскальзывания.

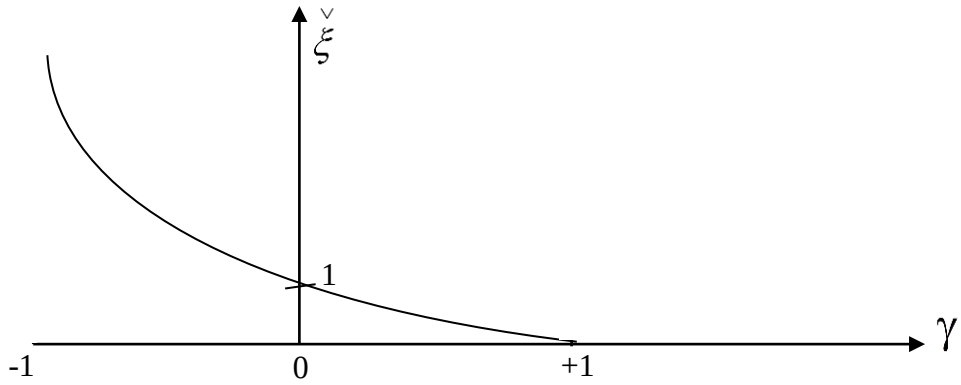


Рис. 3.4. Схематическое изображение зависимости размера γ застойной зоны от параметра γ.

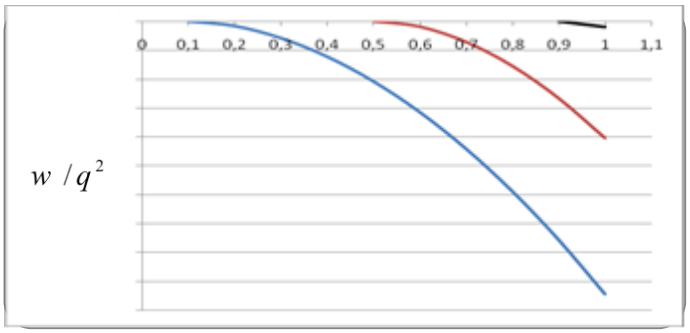
Из рис. 3.4. следует, что течение с присутствием застойной зоны возможно при

$\check{\xi}<1$ и при $\gamma \in (0,1)$.

Знание постоянных C_1, C_2 и γ позволяет представить выражение для скорости течения:

$$W(\xi)=\frac{q^2}{4}(\check{\xi}^2-\xi^2)+q^2/2\,\check{\xi}^2\ln\left(\frac{\xi}{\check{\xi}}\right) \qquad (3.18)$$

На рис. 3.5. представлен график распределения скорости течения w(r) (3.18) в цилиндрической щели в условиях проскальзывания материала на внешней границе щели.



ξ

Рис. 3.5 Графики относительной скорости $w(\xi)/q^2$ течения вязкопластического микроструктурного материала в цилиндрической щели $[\bar{v}, R_0]$ с наличием застойной зоны $\left[\bar{\xi}, \check{\xi}\right]$ для случаев $\check{\xi}=0{,}1; 0{,}5; 0{,}9.$

Скорость проскальзывания материала вдоль стенки, $\xi=1$ можно получить из (3.18):

$$W(1)=\frac{q^2/2}{\gamma+1}\cdot\left(\ln\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}-\gamma\right). \qquad (3.19)$$

Из (3.19) следует, что при отсутствии микроструктуры $\gamma = 0$ скорость проскальзывания отсутствует на внешней границе щели $\xi = 1$, т.е $w(1)\big|_{\gamma=0} = 0$.

На рис. 3.6 представлен график величины скорости проскальзывания материала на границе щели $\xi = 1$ как функции γ.

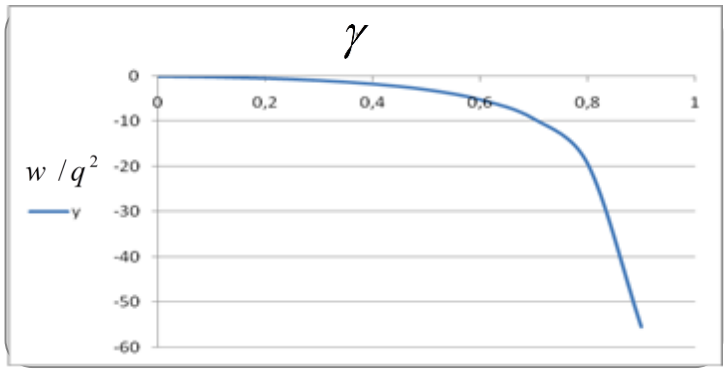


Рис. 3.6. График зависимости скорости проскальзывания $w(\xi)/q^2$ от величины микроструктуры γ.

3.4 Сравнительная оценка влияния микроструктуры на расход через цилиндрический щелевой канал

Вычислим расход материала при его продольном течении через цилиндрический щелевой канал в предложении прилипания материала к границам щели $\xi = \bar{\varsigma}$ и $\xi = 1$.

Такое предположение соответствует течению вязкой жидкости со скоростью $w^0(\xi)$ (3.13)

$$G_0 = \int_{\bar{\xi}}^{1} 2\pi\xi w^0(\xi) d_\xi = \frac{\pi q^2}{2} G_0 \quad ; \; G_O = \frac{1}{4}(1-\bar{\xi}^2)(-\frac{1-\bar{\xi}^2}{\ln\bar{\xi}} + 1 + \ln\bar{\xi}). \qquad (3.20)$$

Для случая учета проскальзывания материала вдоль внешней стенки щели распределение скорости в щели определяется выражением (3.18), так что расход $\overset{V}{Q}$ находится

$$\overset{V}{Q} = \int_{\overset{V}{\xi}}^{1} 2\pi\xi w(\xi) d\xi = \frac{\pi q^2}{2} \overset{V}{G}; \qquad G_0 = \frac{1}{4}\left(1 - \breve{\xi}^2\left(7\breve{\xi}^2 - 6 + 4\ln\breve{\xi}\right)\right) \quad . \qquad (3.21)$$

На рис. (3.7) приведены графики расхода материала при его продольном течении в случаях: а) – прилипания к границам и б) проскальзывания вдоль границы; при условии, что поперечное сечение области щели, занятой течением, одно и то же $\overset{v}{\xi} = \bar{\xi}$.

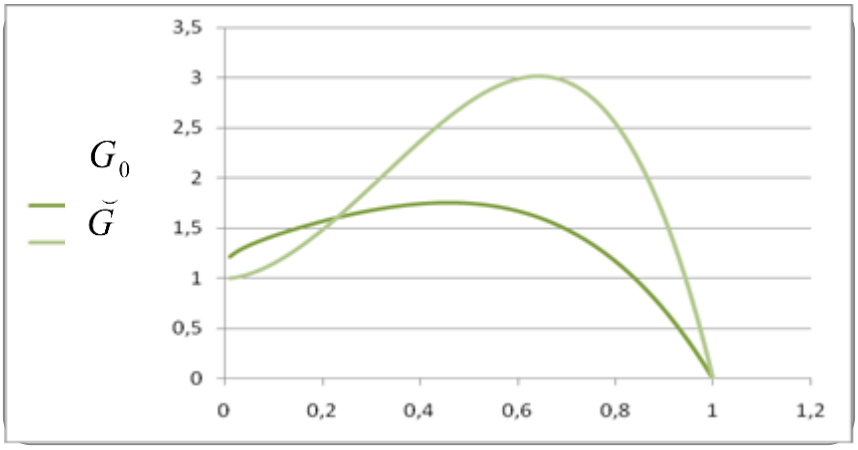


Рис. 3.7. Графики расхода материала при его продольном течении в зависимости от относительного внутреннего $\bar{\xi} = R^{-} / R_0$ радиуса щели (или от относительного радиуса застойной зоны $\breve{\xi} = \breve{R} / R^0$) в случаях: а)прилипания к границам - G_0; б)проскальзывания вдоль границы-$\breve{G}$.

На основе проведенного анализа поведения вязкопластического материала в продольном движении вдоль цилиндрической щели можно сделать вывод, что уменьшение просвета цилиндрической щели за счет застойной зоны ведет к уменьшению расхода (Рис.3.7), а сам расход $\breve{G}$ через площадь поперечного течения $\xi \in [\bar{\xi}, 1]$ и $\xi \in [\overset{v}{\xi}, 1]$ при условии совпадения этих площадей значительно увеличивается, по сравнению с расходом G_0, за счёт проскальзывания материала вдоль пограничного слоя на внешней границе цилиндрической щели.

Глава 4 Компьютерная модель расчета продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре, построенная на алгоритме метода конечных элементов

4.1 Формулировка математической модели течения в дискретной постановке

Дифференциальное уравнение движения микроструктурного вязкопластического материала в цилиндрическом зазоре представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка с малым параметром при старшей производной, поэтому МКЭ с линейными базисными функциями не применим к его решению

$$\delta^2 y^{IV} + \delta^2 \frac{2}{x} y''' + y'' + \frac{1}{x} y' = -1 \qquad (4.1)$$

здесь $y = w/q^2$; $x = \xi$.

Уравнение (4.1) является модельным для приближений по малому эксцентриситету ε для случая течения микроструктурного вязкопластического материала в эллиптическом зазоре, поэтому аппарат численного решения уравнения (4.1) применим и для приближений.

Граничные условия прилипания представительного элемента ΔV к стенкам трубы $x = 1$ и $x = x_0 < 1$ и возможного его поворота имеют вид

$$y(1) = 0; \quad \left(y' - \gamma y''\right)\Big|_{x=1} = 0$$

$$y(x_0) = 0; \quad \left(y' + \gamma y''\right)\Big|_{x=x_0} = 0 \qquad (4.2)$$

В уравнении (4.1) и граничных условиях (4.2) δ^2– малый параметр $\left(\delta^2 < 1\right)$, γ – характерный безразмерный линейный размер представительного деформируемого элемента вблизи границ области течения.

Анализ возможного существования ядра течения в цилиндрическом зазоре (глава 3) показал его отсутствие, т.е. дополнительных границ в области течений нет.

Дискретизация дифференциальных уравнений проводилась многими отечественными учёными [61,62,63,66,152,153,165,111,126,134].

4.2 Выбор базисных функций

Разобьем область течения $(x_0 \le x \le 1)$ сеткой с постоянным шагом Δ [86,127] (Рис. 4.1)

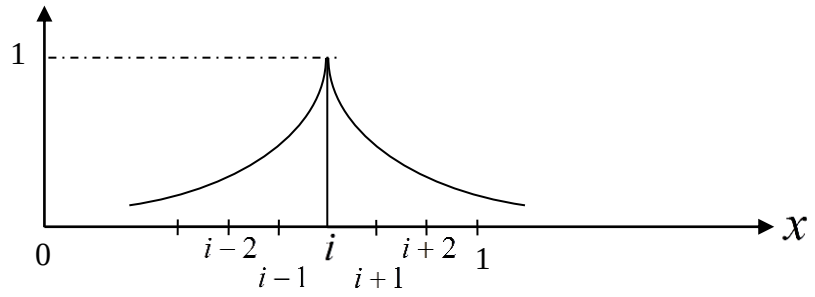


Рис. 4.1. Изображение сетки и базисной функции.

В качестве базисных функций выберем функции вида [34,68]:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x-x_i}{\sigma}}, \ при \quad x > x_i \\ e^{-\frac{x_i-x}{\sigma}}, \ при \quad x < x_i \end{cases} \tag{4.3}$$

Параметр σ будем выбирать исходя из оценки погрешности решения. Решение задачи (4.1) представим в виде ряда по базисным функциям (4.3):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \psi_i(x). \tag{4.4}$$

Здесь y_i – значения решения (скорости) в $i-ой$ узловой точке, так как $\psi_i(x_i) = 1$ и $y(x_i) = y_i$.

Базисные функции вида (4.3) при малых σ быстро убывают при удалении от точки x_i и обладают производной, которую легко представить в рекуррентном виде

$$\psi_i^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{\sigma^k}\psi_i(x), \ при \quad x > x_i \\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{\sigma^k}\psi_i(x), \ при \quad x < x_i \end{cases} \tag{4.5}$$

Далее удобно ввести обозначения:

$$\psi_i(x) = \psi_i^{+}(x), \ \ при \ \ x > x_i$$

$$\psi_i(x) = \psi_i^{-}(x), \ \ при \ \ x < x_i .$$

Подставляя решение (4.4) в уравнение (4.1) получим невязку

$$R(x,\Delta,\sigma,\delta) = \delta^2 \sum_1^N y_i \psi_i^{IV}(x) + \delta^2 \frac{2}{x} \sum_1^N y_i \psi_i'''(x) + \sum_1^N y_i \psi_i''(x) + \sum_1^N y_i \psi_i'(x) + 1. \quad (4.6)$$

Для получения системы уравнений для коэффициентов y_i (решения задачи в узловых точках) потребуем ортогональности невязки $R(x,\Delta,\sigma,\delta)$ системе выбранных базисных функций $\psi_i(x)$ в области $x \in [x_0,1]$ [125,127]

$$\int_{x_0}^{1} R(x,\Delta,\sigma,\delta) \cdot \psi_l(x) dx = 0, \quad (l = 3,4,\ldots N-2). \quad (4.7)$$

Систему линейных уравнений (4.7) дополним граничными условиями

$$y_1 = 0; \quad -(\Delta+\gamma)y_1 + (\Delta+2\gamma)y_2 - \gamma y_3 = 0;$$

$$y_N = 0; \quad -(\Delta-\gamma)y_{N-2} + (\Delta-2\gamma)y_{N-1} - \gamma y_N = 0. \quad (4.8)$$

Дифференциальные граничные условия (4.2) представлены в конечно-разностном виде с погрешностью порядка Δ^2.

Ограничиваясь интервалом $x \in [x_{l-2}, x_{l+2}]$, система уравнений (4.7) примет вид

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\delta^2}{\sigma^4}\right)\left[y_{l-2} \int_{l-2}^{l+2} \psi_{l-2}(x)\psi_l(x)dx + y_{l-1} \int_{l-2}^{l+2} \psi_{l-1}(x)\psi_l(x)dx + \right.$$

$$\left. y_l \int_{l-2}^{l+2} \psi_l(x)\psi_l(x)dx + y_{l+1} \int_{l-2}^{l+2} \psi_{l+1}(x)\psi_l(x)dx + y_{l+2} \int_{l-2}^{l+2} \psi_{l+2}(x)\psi_l(x)dx \right] +$$

$$+\left(\frac{1}{\sigma} + 2\frac{\delta^2}{\sigma^3}\right)\left[y_{l-2} \int_{l-2}^{l+2} \frac{1}{x}\psi_{l-2}(x)\psi_l(x)dx + \right. \quad (4.9)$$

$$y_{l-1} \int_{l-2}^{l+2} \frac{1}{x}\psi_{l-1}(x)\psi_l(x)dx + y_l \int_{l-2}^{l+2} \frac{1}{x}\psi_l(x)\psi_l(x)dx +$$

$$\left. + y_{l+1} \int_{l-2}^{l+2} \frac{1}{x}\psi_{l+1}(x)\psi_l(x)dx + y_{l+2} \int_{l-2}^{l+2} \frac{1}{x}\psi_{l+2}(x)\psi_l(x)dx \right] =$$

$$= -\int_{l-2}^{l+2} \psi_l(x)dx; \quad (l = 3,4,\ldots N-2).$$

Система линейных алгебраических уравнений представляет собой систему с 5-ти диагональной матрицей.

Заметим, что слагаемые с параметром сингулярности δ содержат значения функции y в пяти точках при этом для малых σ коэффициенты при y_{l-2}, y_{l+2} меньше чем при y_l, y_{l-1}, y_{l+1}. Так что даже при трехточечной аппроксимации дифференциального уравнения (4.1) сингулярные слагаемые содержатся в уравнении.

Ограничимся далее трехточечной аппроксимацией уравнения (4.1) с базисными функциями (4.3) [32,33]. Система линейных алгебраических уравнений для y_l примет вид системы с 3-х диагональной матрицей

$$Ay = b$$

$$a_{11} = 1; \qquad b_1 = 0;$$

$$A_{l,l-1} = \frac{1-\frac{\Delta}{\sigma}}{2\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_{l-1}}\right];$$

$$A_{l,l} = \frac{2}{\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_l}\right];$$

$$A_{l,l+1} = \frac{1-\frac{\Delta}{\sigma}}{2\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_{l+1}}\right]; \qquad (4.10)$$

$$a_{NN} = 1, \qquad b_N = 0; \qquad (l = 2,3,\ldots N-1)$$

$$b_l = -1;$$

Граничные условия качения и скольжения представительного элемента вдоль границы отличаются от (4.2.) и их можно представить так:

$$\begin{aligned} &y(1) - \gamma y'(1) = 0 \\ &y(x_0) - \gamma y'(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Разностный аналог условий (4.11) на сетке и шагом Δ будет:

$$\begin{aligned} &(\Delta+\gamma)y_1 - \gamma y_2 = 0; \\ &y_{n-1} + (\Delta-\gamma)y_n = 0 \end{aligned} \qquad (4.12)$$

так что 1-я и N-я строки системы дадут элементы матрицы и правую часть следующую

$$a_{11} = \Delta + \gamma;\ a_{12} = -\gamma;\ b_1 = 0;$$
$$a_{nn-1} = 1;\ a_{nn} = \Delta - \gamma_0;\ b_n = 0; \tag{4.13}$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений Ay=b использовался классический метод последовательного исключения неизвестных Гаусса [86] в форме метода прогонки [151-155]

Пусть система уравнений Ay=b имеет вид [154]

$$\begin{aligned} &c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0,\ i = 0, \\ &-a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_c i_{i+1},\ \ 1 \le i \le N-1, \\ &-a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N,\ i = N \end{aligned} \tag{4.14}$$

тогда «прогоночные» коэффициенты α,β вычисляются

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0};\ \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{(c_i - a_i\alpha_i)},\quad i = 1,2,\ldots N-1 \\ &\beta_1 = \frac{f_o}{c_0};\ \beta_{i+1} = \frac{(f_i + \alpha_i\beta_i)}{(c_i - a_i\alpha_i)},\quad i = 1,2,\ldots N \end{aligned} \tag{4.15}$$

Само решение y системы Ay=b находится по формулам

$$y_N = \beta_{N+1};\ y_i = \alpha_{i+1} y_{j+1} + \beta_{i+1},\quad i = N-1, N-2\ldots 0 \tag{4.16}$$

4.3 Задание на разработку программного комплекса расчета скорости течения МВПМ в цилиндрическом зазоре и объемного расхода через поперечное сечение

Найти решение системы A_y=b, где A – трехдиагональная матрица

I Вариант задачи, случай прилипания материала к стенкам трубы

Первая строка матрицы

$$a_{11} = 1;\ a_{12} = \ldots = a_{1n}\ \ n = 0;\ \ b_1 = 0$$

Для l= 2,3,4,…n-1

$$a_{l,l-1} = \frac{1 - \frac{\Delta}{\sigma}}{2\sigma^2}\left[\left(1 + \frac{\delta^2}{\sigma^2}\right) + \sigma\left(1 + \frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_{l-1}}\right];$$

$$a_{l,l} = \frac{2}{\sigma^2}\left[\left(1 + \frac{\delta^2}{\sigma^2}\right) + \sigma\left(1 + \frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_l}\right];$$

$$a_{l,l+1} = \frac{1-\frac{\Delta}{\sigma}}{2\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_{l+1}}\right].$$

Последняя строка матрицы $a_{n,n} = 1;\ b_{n,n} = 0$

Правая часть $b_l = -1$ для *l = 2,3,…N-1*

$$A_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & x & x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

II Вариант задачи, случай проскользывания материала вдоль стенок

Первая строка матрицы

$a_{11} = \Delta + \gamma;\ a_{12} = -\gamma;\quad a_{13}..a_{1n} = 0;\quad a_{1n} = 0;\quad b_1 = 0$

$$a_{l,l-1} = \frac{1-\frac{\Delta}{\sigma}}{2\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_{l-1}}\right];$$

$$a_{l,l} = \frac{2}{\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_l}\right];$$

$$a_{l,l+1} = \frac{1-\frac{\Delta}{\sigma}}{2\sigma^2}\left[\left(1+\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right)+\sigma\left(1+\frac{2\delta^2}{\sigma^2}\right)\frac{1}{x_{l+1}}\right].$$

$b_l = -1,\quad (l = 2,3,3\dots n-1)$

$a_{nn-1} = 1;\ a_{nn} = \Delta - \gamma;\quad b_n = 0$ N-я строка

$$A_l = \begin{pmatrix} \Delta+\gamma & -\gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & x & x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x & x & x & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \dots & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \Delta-\gamma \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ \dots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание области $x \in [x_0;1]$

$x_0 = 0{,}1; 0{,}5; 0{,}9$ - три варианта

Задание N=10 ;100 – два варианта

Задание Δ $\Delta = \dfrac{1 - x_0}{N}$

$\Delta_1 = 0{,}09;\ \Delta_2 = 0{,}05;\ \Delta_3 = 0{,}01$

$\Delta_1' = 0{,}009;\ \Delta_2' = 0{,}005;\ \Delta_3' = 0{,}001$

Задание δ

$\delta_1 = 0{,}01;\ \delta_2 = 0{,}1;\ \delta_3 = 0{,}5$

Задание ($\sigma > \delta;\ \sigma > \Delta$)

$\sigma_1 = 0{,}02;\ \sigma_2 = 0{,}2;\ \sigma_3 = 0{,}6$

Задание $x_l = x_0 + l \cdot \Delta$

Случай $\delta = 0$ соответствует материалу без микроструктуры.

Вычисление расхода Q через поперечное сечение зазора

$$Q = \int_{x_0}^{1} y(x)dx = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta$$

4.4 Описание графиков на рис. 4.2-4.10

На рис 4.2 – 4.10 приведены графики скорости течения материала в цилиндрическом зазоре под действием перепада давления для различных параметров материала δ, γ, для различных параметров σ базисных функций разных условий на границах трубы. Рядом с каждым графиком в таблицах приведены значения параметров: σ, N, x_0, δ и γ а также рассчитанные значения скорости в узловых точках и суммарный расход материала через поперечное сечение. Анализ графиков выявил:

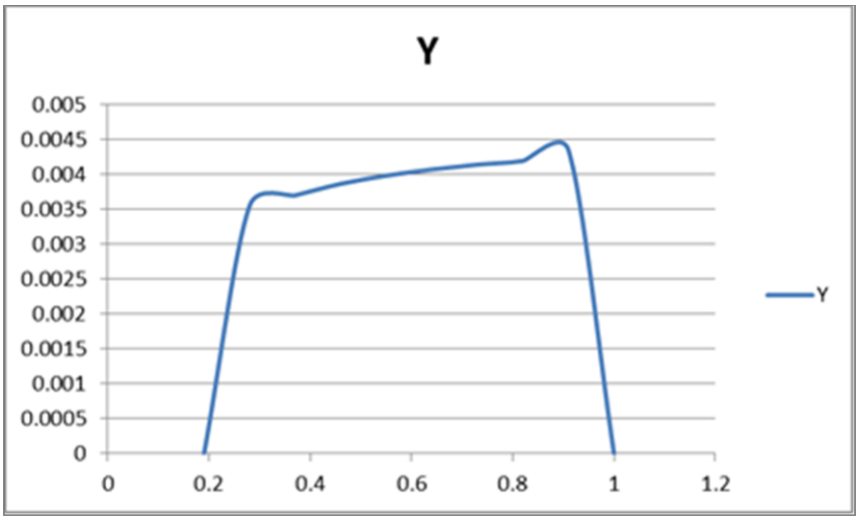
1) течение материала происходит без образования твердых зон при $x \in [x_0,1]$;
2) при $\delta \to 0$ течение материала в цилиндрическом зазоре стремится к линейному сдвиговому течению;

3) увеличение малого параметра $\delta \in [0{,}01;0{,}1]$ ведет к увеличению скорости расхода;

4) вычислительный алгоритм МКЭ устойчиво работает при $\sigma \geq \Delta = \dfrac{(1 - x_0)}{N}$.

Программный комплекс реализован на языке visual basic [45,46,47,48,50,51,52,53,56,57,58,179]

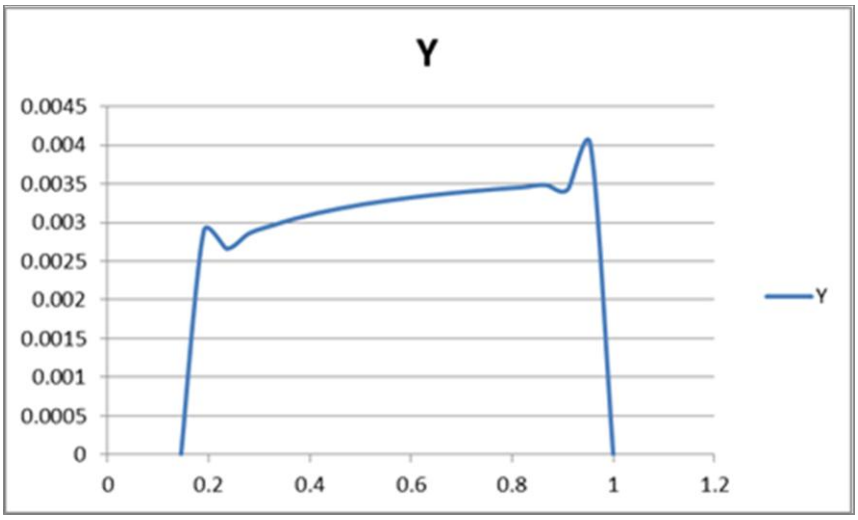
X	Y
0	0
0.19	0
0.28	0.003552
0.37	0.003701
0.46	0.003866
0.55	0.003983
0.64	0.004072
0.73	0.004142
0.82	0.004195
0.91	0.00435
1	0



б=0.1 , N=10, X_o=0.1, δ=0.1 прилипание, расход материала=0.00915860543592324

Рис. 4.2.

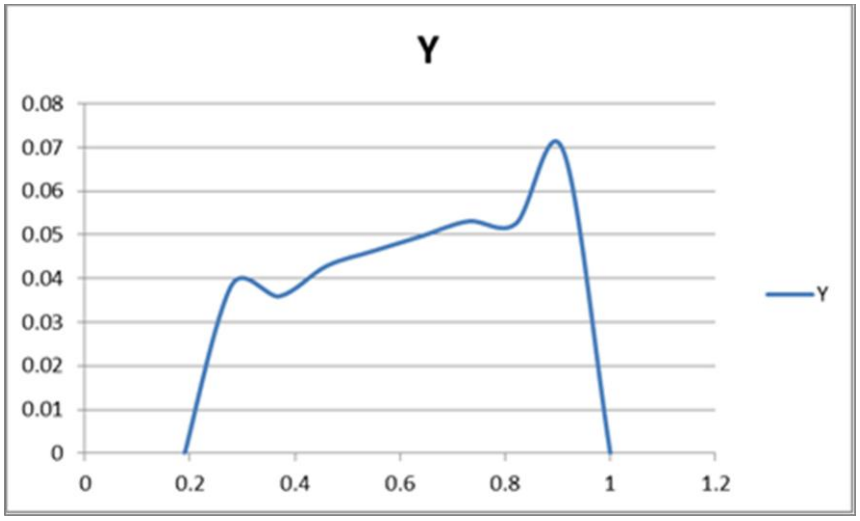
X	Y
0	0
0.145	0
0.19	0.002891
0.235	0.002662
0.28	0.002861
0.325	0.002961
0.37	0.00305
0.415	0.003123
0.46	0.003184
0.505	0.003236
0.55	0.00328
0.595	0.003319
0.64	0.003354
0.685	0.003384
0.73	0.003411
0.775	0.003435
0.82	0.003456
0.865	0.003486
0.91	0.003426
0.955	0.004004
1	0



б=0.1 , N=20, X_o=0.1, δ=0.1 прилипание, расход материала=0.0163782513887271

Рис. 4.3.

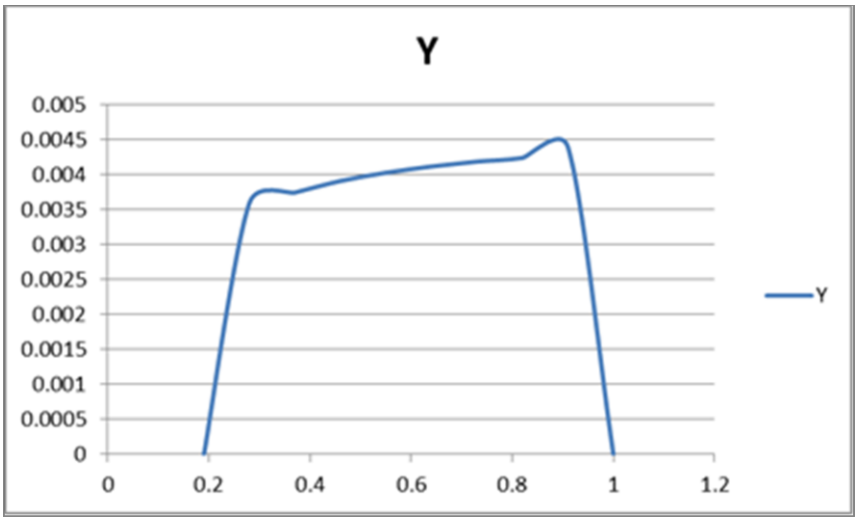
X	Y
0	0
0.19	0
0.28	0.038622
0.37	0.035947
0.46	0.042868
0.55	0.046333
0.64	0.049659
0.73	0.053099
0.82	0.052512
0.91	0.069446
1	0



б=0.5 , N=10, X_o=0.1, δ=0.1 прилипание, расход материала=0.232950461971681

Рис. 4.4.

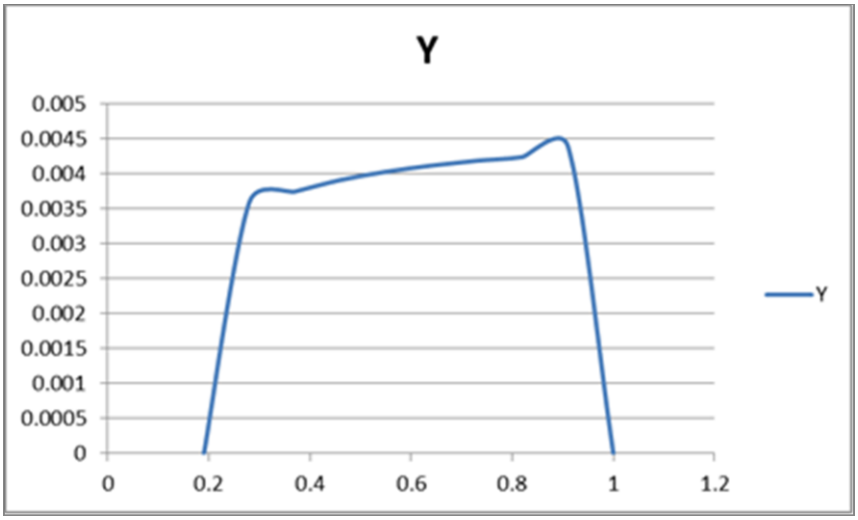
X	Y
0	0
0.19	0
0.28	0.003596
0.37	0.003746
0.46	0.003911
0.55	0.004029
0.64	0.004118
0.73	0.004188
0.82	0.004241
0.91	0.004397
1	0



б=0.1 , N=10, X_o=0.1, δ=0.01 прилипание, расход материала=0.0193614556899774

Рис. 4.5.

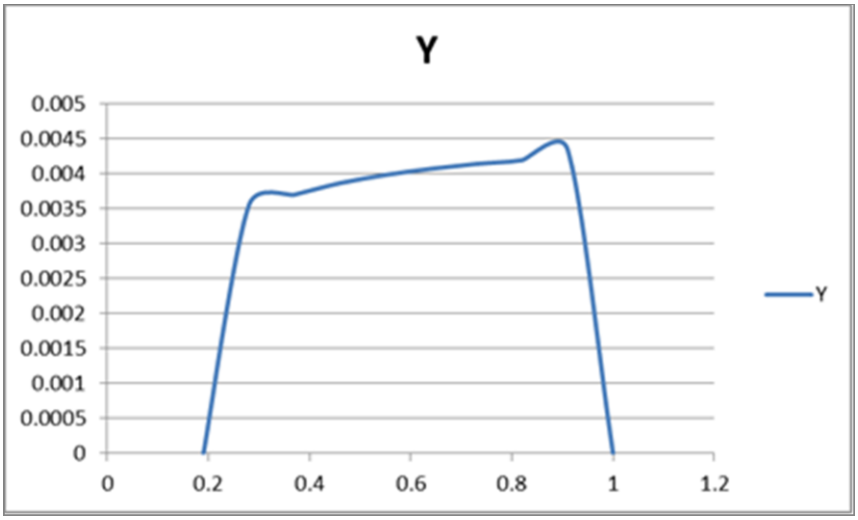
X	Y
0	0
0.19	0
0.28	0.003597
0.37	0.003746
0.46	0.003912
0.55	0.004029
0.64	0.004118
0.73	0.004188
0.82	0.004242
0.91	0.004398
1	0



б=0.1 , N=10, X_o=0.1, δ=0,01 прилипание, расход материала=0.0195819705466684

Рис. 4.6.

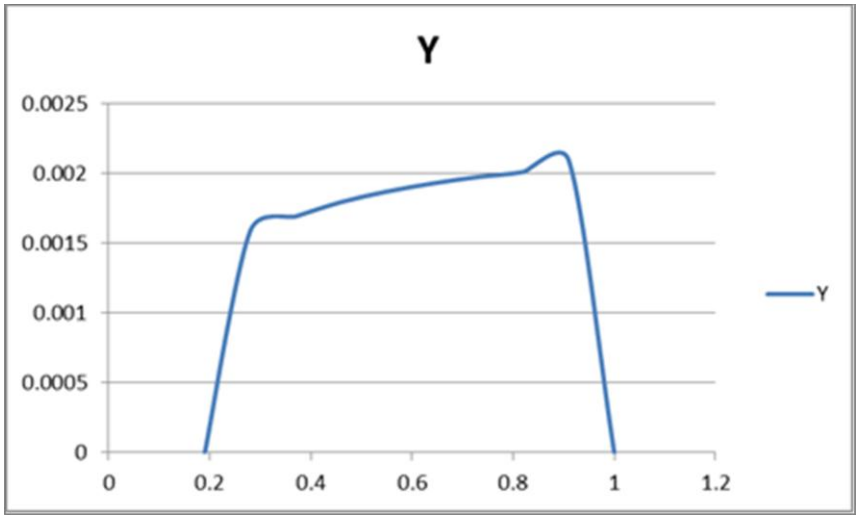
X	Y
0	0
0.19	0
0.28	0.003552
0.37	0.003701
0.46	0.003866
0.55	0.003983
0.64	0.004072
0.73	0.004142
0.82	0.004195
0.91	0.00435
1	0



б=0.1 , N=10, X_o=0.1, δ=0.01 , γ=0.01скольжение, расход материала=0.0194580952553924

Рис. 4.7.

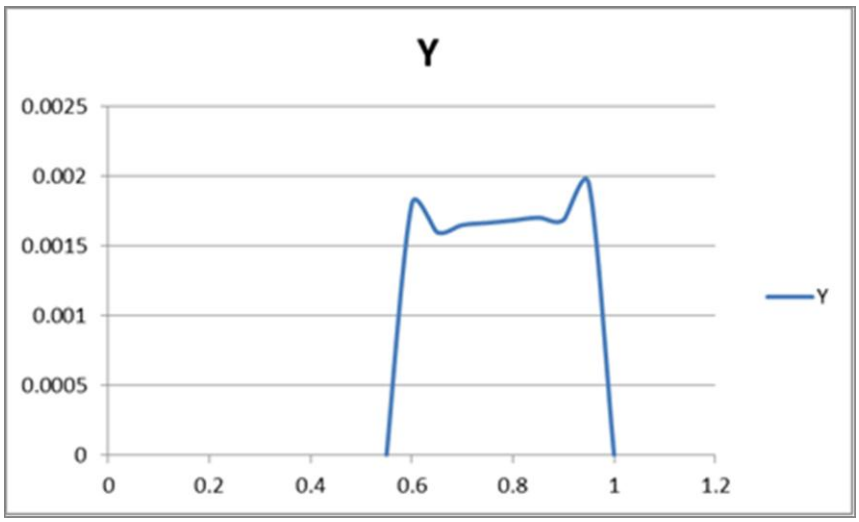
X	Y
0	0
0.19	0
0.28	0.001589
0.37	0.001693
0.46	0.001796
0.55	0.001871
0.64	0.001929
0.73	0.001975
0.82	0.002012
0.91	0.002095
1	0



б=0.1 , N=10, X_o=0.1, δ=0.1 , γ=0.1 скольжение, расход материала=0.0263330116790779

Рис. 4.8.

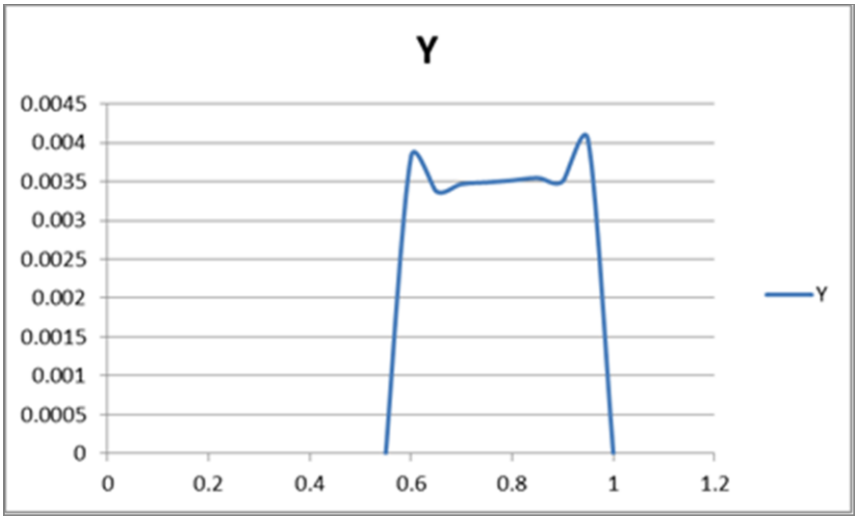
X	Y
0	0
0.55	0
0.6	0.001803
0.65	0.001599
0.7	0.00165
0.75	0.001666
0.8	0.001684
0.85	0.001703
0.9	0.001687
0.95	0.001947
1	0



б=0.1, N=10, X_o=0.5, δ=0.1 , γ=0.1 скольжение, расход материала=0.0159172070588687

Рис. 4.9.

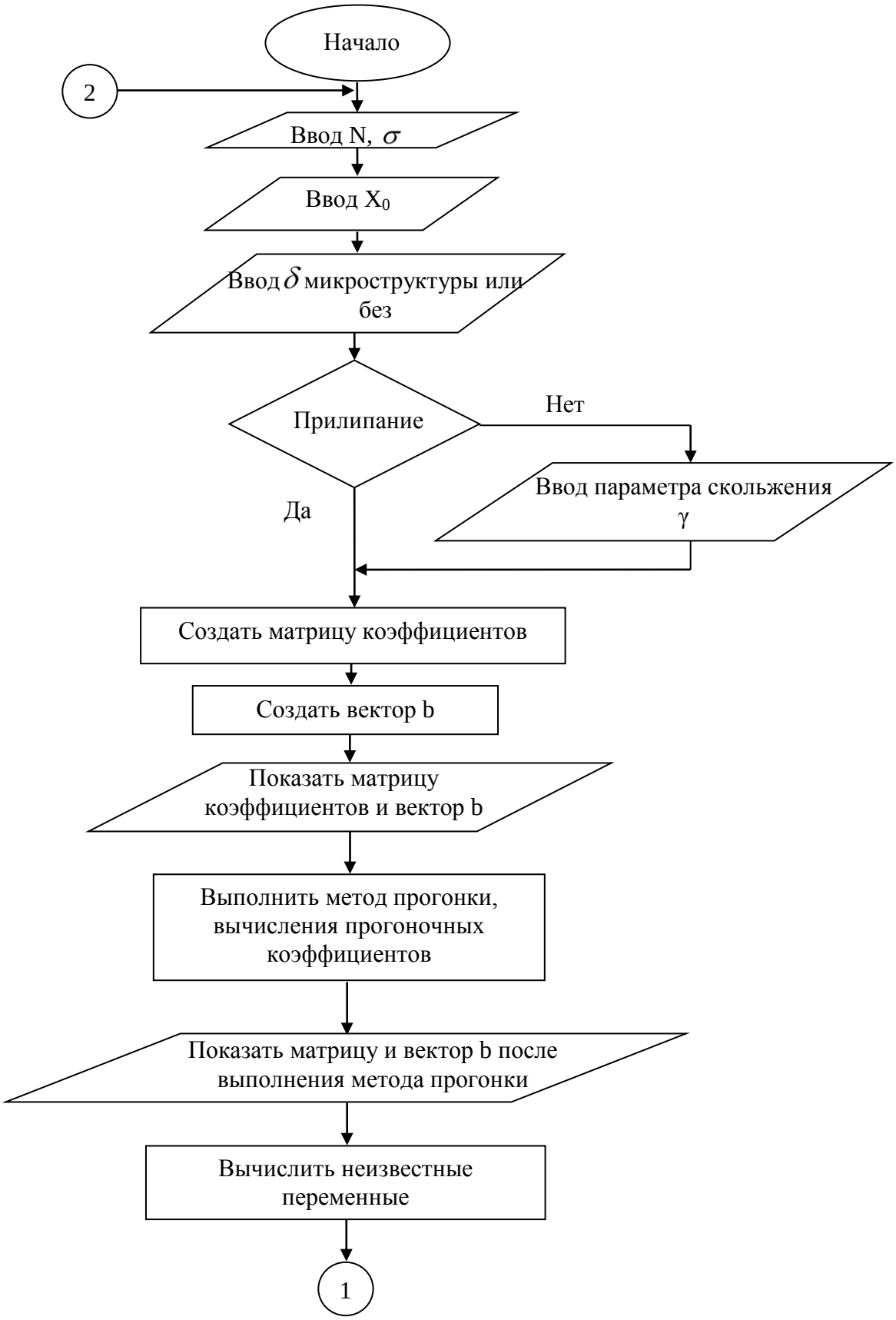
X	Y
0	0
0.55	0
0.6	0.00382
0.65	0.003373
0.7	0.003468
0.75	0.00349
0.8	0.003516
0.85	0.003547
0.9	0.003503
0.95	0.004035
1	0



б=0.1, N=10, X_o=0.5, δ=0.01 , γ=0.01 скольжение, расход материала=0.0251828098178753

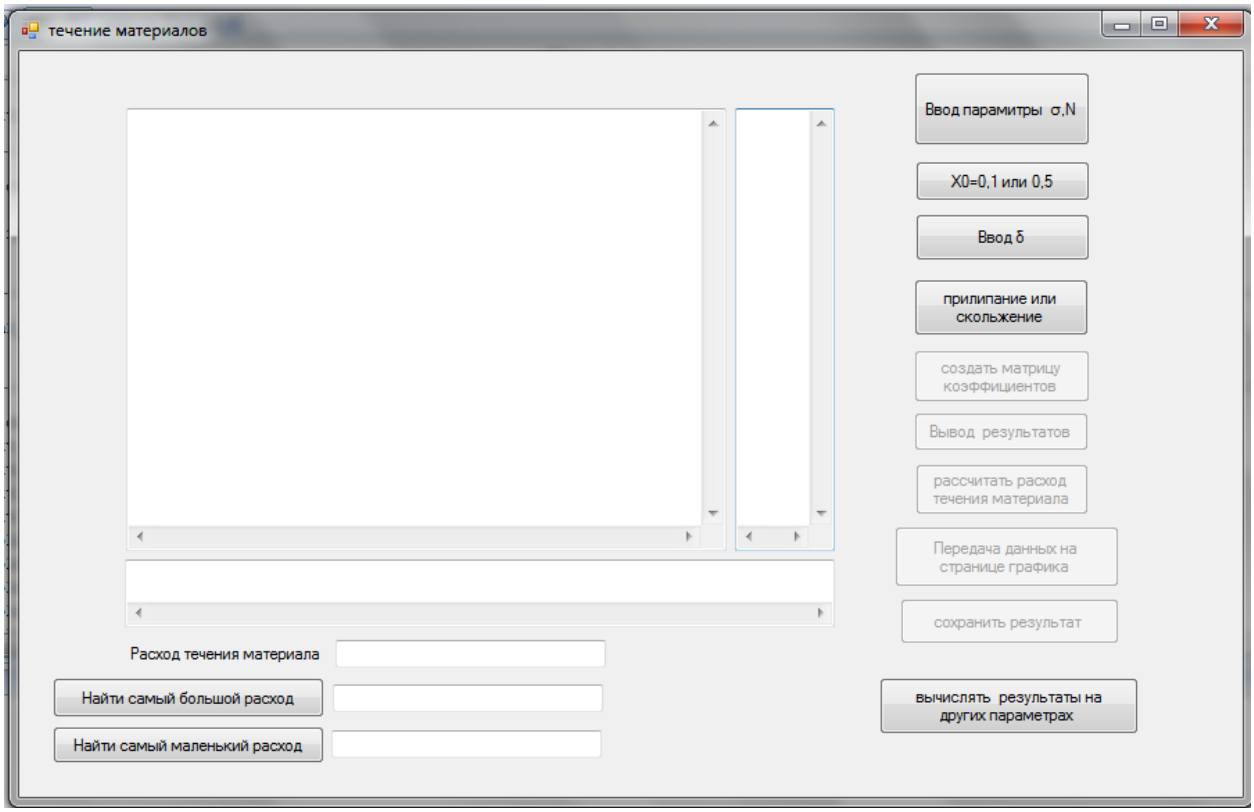
Рис. 4.10.

4.5 Блок-схема программы:

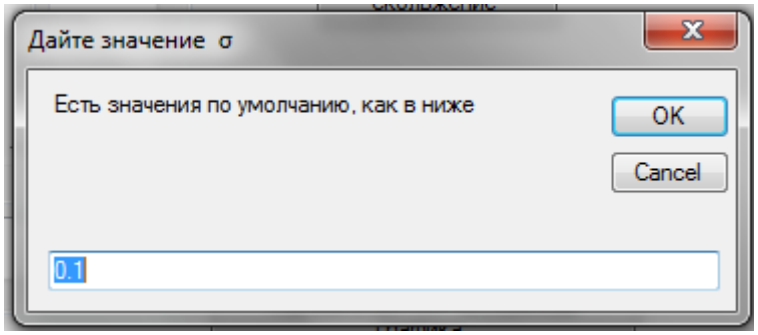



1
Показать неизвестные переменные
Вычислить расход течения материала
Показать расход течения материала
Послать данные на страницу графика
Рисовать график в зависимости от данных, передаваемых
Показать график
Нужно вычислять результаты для других параметров
Да
2
Нет
Сравнить результаты и найти максимальный и минимальный расход
показать максимальный и минимальный расход
Конец

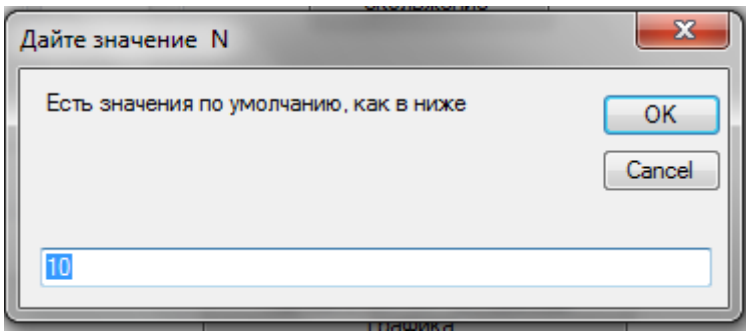
4.6 Инструкция по пользованию программой

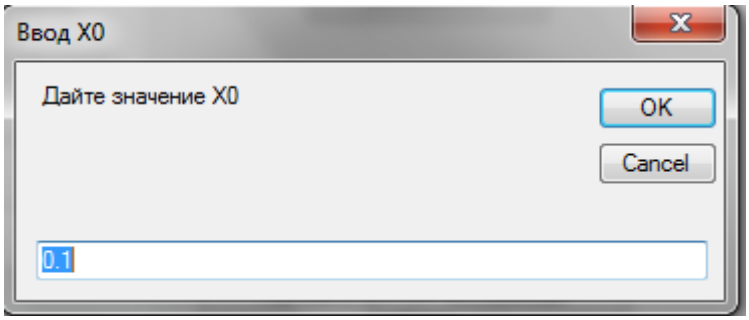


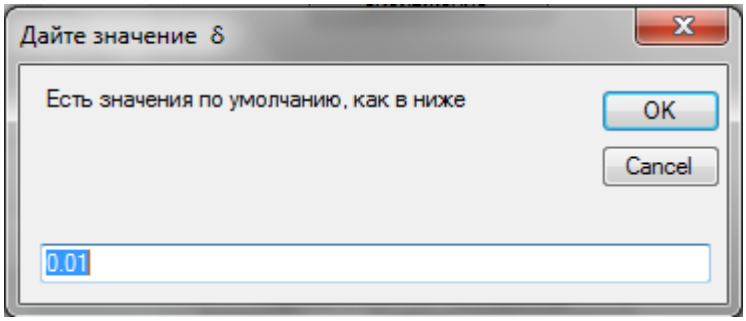
Интерфейс программы для ввода параметров задачи и демонстрации на дисплее результатов работы программы на всех этапах вычислений. Кнопки вычисления матрицы и вектора пассивны до момента проверки результата вычисления пользователем.



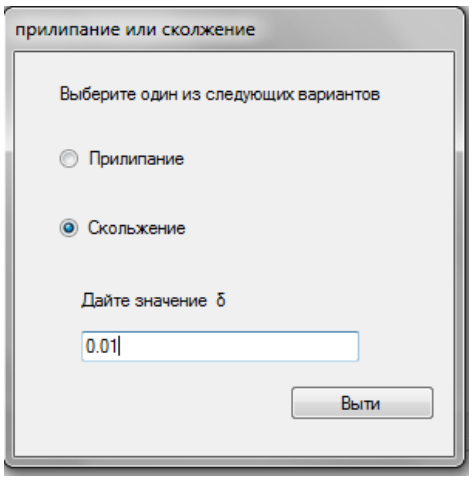
Окно задания параметра σ базисных функций, позволяющее либо оставлять заранее выбранное значение σ, либо задавать новое.



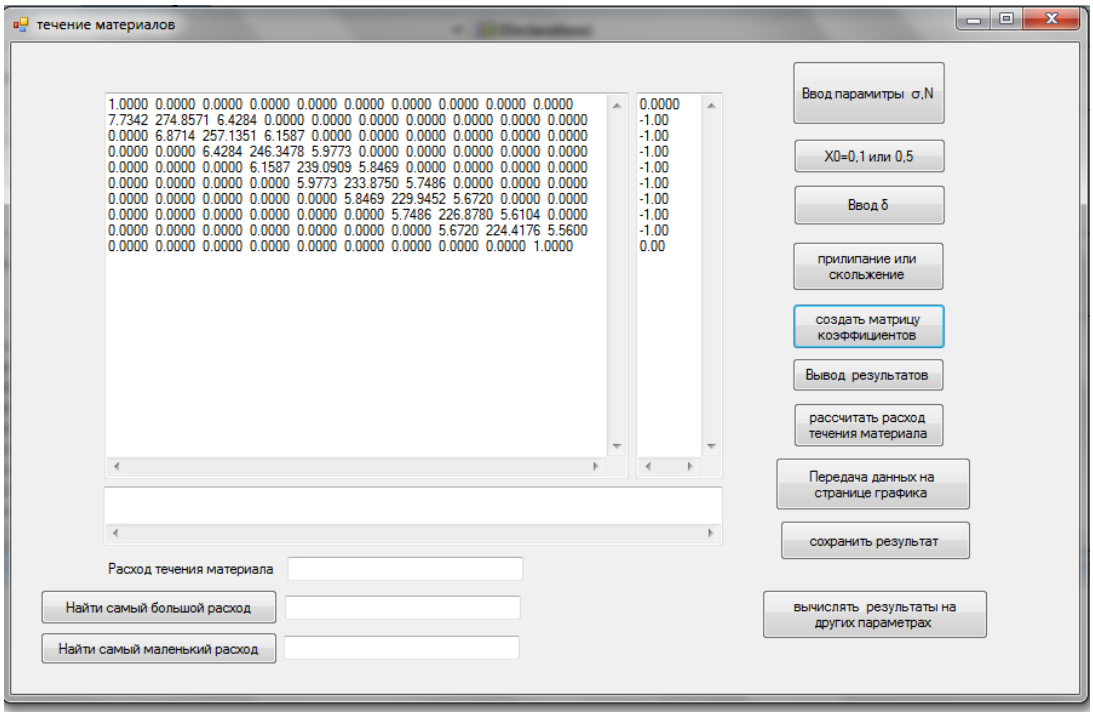




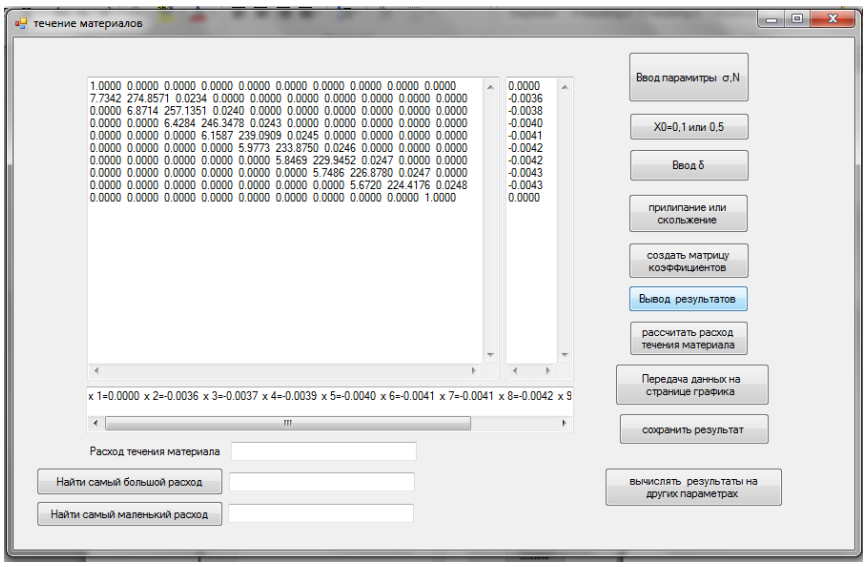
Окна задания: N – числа разбиения области решения [x_0, 1] на отрезки $\Delta = \frac{(1 - x_0)}{N}$; радиуса x_0 внутреннего цилиндра; параметра δ микроструктуры. Эти окна открываются после нажатия соответствующих кнопок на главном меню. На всех окнах первоначально задается осредненные значения параметров σ, N, x_0, δ – значения которых может изменять пользователь.

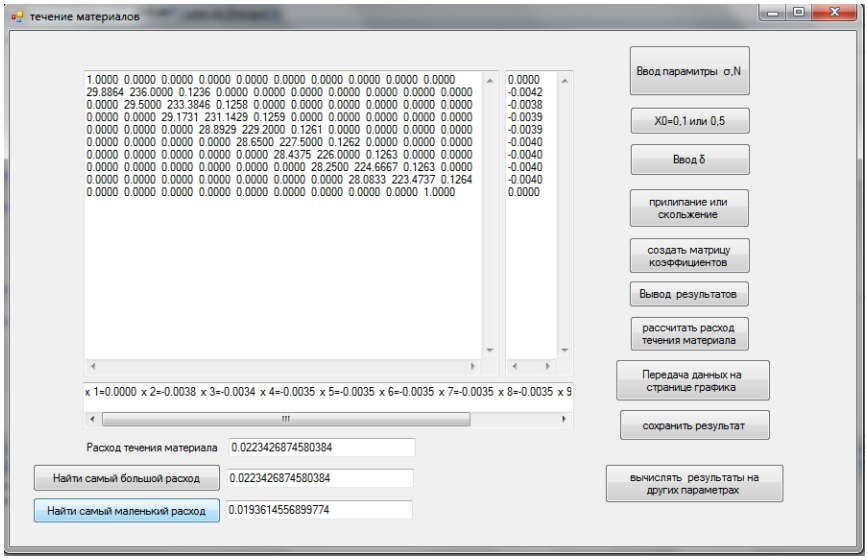


Окно выбора варинатов расчета течения при условиях: прилиания материала к стенкам трубы или скольжения материала вдоль стенок. Задание параметра γ активизируется нажатием выбора «Скольжение».



Демонстрация в окне главного меню коэффициентов a_{ij} матрицы NxN системы линейных алгебраических уравнений и вектоар b_i правых частей уравения Ay=b.





Демонстрация в окне главного меню вектора y_{ij} решения системы линейных алгебраических уравнений, где $y_i=V_i$ – скорость течения материала в узловых точках. В нижней строке приведено значение безразмерного расхода материала через попереченое сечение. затем программа найдёт максимальный и минимальный расход для нескольких параметров

Заключение

1. Сформулирована полная вместе с граничными условиями математическая модель стационарного продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубах различного поперечного сечения. Граничные условия прилипания или скольжения материала на стенках имеют место для различных реальных материалов в зависимости от превалирования в них свойств вязкости или пластичности. Построенная математическая модель содержит производные четвертого порядка, что потребовало увеличения числа граничных условий. Показано, что дополнительные граничные условия, обусловленные микроструктурой материала, выполняются автоматически при стремлении параметра микроструктуры к нулю, и тем самым имеет место асимптотический переход модели течения микроструктурного вязкопластического материала к классической идеальной модели течения вязкопластической жидкости.

2. Алгоритм построения и результаты анализа поля скоростей течения МВПМ в трубе эллиптического сечения основаны на использовании метода малого параметра (методы возмущений) решения сингулярно возмущенных задач. Детальное исследование пограничного слоя показало возможность его аппроксимации как в линейном, так и в нелинейном приближении, что позволяет провести сращивание решений внутреннего и внешнего приближений. Показано, что продольный градиент давления в трубе эллиптического сечения является не осесимметричной величиной с отклонением порядка эксцентриситета эллипса. Моделирование поля скоростей в цилиндрической трубе позволило выделить случаи: течения без образования жесткого ядра; неразрывного гладкого течения с выделением ядра течения; течения с ядром, которое проскальзывает относительно основного течения.

3. Программный комплекс, реализованный на основе алгоритма метода конечных элементов построения поля скоростей течения МВПМ в

цилиндрическом зазоре, позволяет выделять течение в пограничном слое и основной поток. Моделирование течения в кольцевом зазоре с условием прилипания материала к стенкам показало невозможность образования твердых зон.

4. Математическая и компьютерная модели течения микроструктурного вязкопластического материала допускают слабо слоистое поле скоростей, поперечный размер которых есть величина порядка относительного характерного параметра микроструктуры. Для случая внедрения молекул в углеродную трубку слой молекул можно модельно соотнести со слоем микроструктурного вязкопластического материала. Для переднего сечения микроструктурного вязкопластического материала, внедряющегося в углеродную трубку под действием поверхностного натяжения, отмечен на модели факт более быстрого движения материала у стенки нанотрубки по сравнению со скоростью центральных слоев, что аналогично внедрению молекул в нанотрубку.

Список использованных источников

1. Abraham F. F. Simulating materials failure Ьу using up to one billion atoms and the world's fastest computer / F. F. Abraham, R. Walkup, H. Gao // Work-hardening. Proceedings of National Academy of Sciences (USA). - 2002. V. 99. - № 9. - P. 5783-5787.
2. Baskes M. I. The status role of modeling and simulation in materials science and engineering / M. 1. Baskes // Сиrrent Opinion in Solid State & Mater. Sc. - 1999. - V. 4. - № 3. - P. 273-277.
3. Cambou B. Change of scale in granular materials / B. Cambou, M. Chaze, F. Dedecker // Eur. J. Mech. V. 19, № 6, 2000. P. 999-1014. '
4. Casaverde L. Distinct element analysis for rock avalanche / L. Casaverde, K. Iwashita, Y. Tarumi, M. Hakuno // Proc. JSCE 55, № 515, 1989. P. 153-162.
5. Chevrier P. Spall fractиre: Mechanical and microstructural aspects / P. Chevrier J.R. Klepaczko // Engineering Fractиre Mechanics. - 1999. - V. 63. № 3. - P. 273-294.
6. Cosserat E. et F. Theorie des Corps Defonnables / E. et F. Cosserat Paris. Librarie Scientifiqиe A. Hennann et Fils.,1909.
7. Ebinger T. Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes / T. Ebinger, H. Steeb, S. Diebles // Compиt. Mater. Sci. - 2005. - Vol. 32. - 337-347.
8. Eringen A. C. Theory of micropolar fluid A. C. Eringen // J. Math. Mech.,V. 16, № 1, 1966.-P.1-16.
9. Eringen A.C. Microcontinииm Field Theories. 1. Foundation and Solids / A.C. Eringen. - Springer- Verlag New York, 1998. - 319 p.
10. Evans M. W. The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations / M. W. Evans, F. H. Harlow. - Los Alamos Scientific Lab. Rept. № LA-2139. - Los Alamos, 1957.
11. Forest S. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized

continua / S. Forest, R. Sievert // Acta Mech. - 2003. - Vol. 160. - P. 71-111.

12. Forest S. Homogenization Methods and the Mechanics of Generalized Continиа. Part 2 / S. Forest // Theoretical and Applied Mechanics. 2002. - Vol. 28-29. - P. 113-143.
13. Kardiadakis G. Microflows and nanoflows / G. Kardiadakis, A. Beskok, N. Aиги // Fundamentals and simulation. - Springer, 2005. - 817 p.
14. Le K. C. Kontinuums mechanisches Modellieren von Medien mit veranderlicher Mikrostruktur / K. C. Le //Mitt. Inst. Mech 106, 1996. P. 1-193.
15. Lomdahl P. S. Molecular dynamics of very large systems / P. S. Lomdahl, D. M. Beazley, S. J. Zhou // Radiation Effects and Defects in Solids. 1997. - V. 142. - № -4. - P. 1-7.
16. Mindlin R. D. Influence of Couple-Stress on Stress Concentration / R. D. Mindlin // Exp. Mech. - 1963. - V. 3. - P. 1-7.
17. Misra J. C. A mathematical model for the study of blood flow through a channel with permeable walls / J. C. Misra, S. K. Ghosh // Acta mech. 1-4, V. 122,1997.-P. 137-153.
18. Naufeh A. H. Perturbation method, Y. Wiley: New York, 1973.
19. Pearson J. R. A. Key questions in rock mechanics / J. R. A. Pearson // Key Quest. Rock Mech.: Proc. 29th U.S. Symp. Minneapolis, 13-15 June, 1988. - Rotterdam; Brookfield, 1988. P. 7-16.
20. Prat Pere C. Microplane model for triaxial deformation of soils / C. Prat Pere, P. Bazant Zdenek, //Num. Models Geomech. NUMOG III: Proc. 3rd Int. Symp., Niagara Falls, 8-11 May, 1989. London; New York, 1989. -P. 139-146.
21. Prosvetov V. I. Modeling of flow of medium with homogeneous microstructure / V. I. Prosvetov P. P. Sumets N. D. Verveyko // International jounal ofmathematical models and methods in applied sciences. - 2011. - V. 5. I.3. - pp. 508-516.
22. Schraad M. W. On the macroscopic properties of discrete media with nearly

periodic microstructures / M. W. Schraad // Int. J. Solids and Struct V. 38, № 4243, 2001.-P. 7381-7407.

23. Takahashi K. Continuum mechanics for higher stage micropolar materials. 1st report. Kinematics / K. Takahashi, K. Shizawa // Jap. Soc. Mech. Eng. A. 55, №519, 1989.-P. 2356-2361.
24. Thomton C. Nимerical simиlations of deviatoric shear deformation ofgranular media / C. Thomton //Geotechniqие. - 2000. - V. 50. - P. 43-53.
25. Trent Bruce G. Microstructural effects in static and dynamic numerical experiments / C. Trent Bruce // Key Quest. Rock Mech.: Proc. 29th U.S. Symp.Minneapolis, 13-15 June,1988. Rotterdam; Brookfield, 1988. -P.395-402.
26. Tuckerman M. E. Understanding modem molecиlar dynamics: Techniqиes and applications / M. E. Tиckerman, O. J. Martyna // J. Phys. CЬem. B. - 2000. - V. 104. - № 2. - P. 159-178.
27. Vashishta P. Million atom molecиlar dynamics simиlations of materials оп parallel compиters / P. Vashishta et al. // Cиrrent Opinion in Solid State & Mater. Sc. -1996. - V. 1. -№ 6. -P. 853-863.
28. Warren William E. Micropolar and nonlocal effects in spatially-periodic, two-dimensional structures / E. Warren William, E. Byskov // Rept. R 37, 1997. -P. 1-49.
29. Watts A. J. Dimensional scaling for impact cratering and perforation / A. J. Watts, D. Atkinson // Int. J. Impact End. -17, № 4-6, 1995. P. 925 - 935.
30. Акивис М. А. Тензорное исчисление / М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. - М.: Наука, Главная редакция Физико-математической литературы. - 1969. - 351 с.
31. Александрова Н. И. Аппроксимация граничных условий в задачах гидроупругости / Н. И. Александрова / / Математическое моделирование. 1991.-tom 3-№ 12.-с. 3-12.
32. Аль Имам А. А., Вервейко Н. Д., Ноаман С. А. МКЭ сквозного решения сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений

четвертого порядка без выделения пограничного соля / А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман // Министерство образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «Воронежская Государственная лесотехническая академия», российский фонд фундаментальных исследований. Международный молодёжный симпозиум, «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения», г. Воронеж 18 – 19 ноября 2014 года, № 5 часть 2, с. 134-137.

33. Аль Имам А. А., Вервейко Н. Д. Применение Вейвлет-преобразования к решению задач течения материалов с учётом микроструктуры./ А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко // (Воронеж) Сборник: Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 26-28 ноября 2012 г.: в 2 ч. Ч. 2. – Воронеж . с.2 .

34. Аль Имам А. А. МКЭ с нелинейными базисными функциями расчёта параметров течения микроструктурного вязкопластического материала/ А. А. Аль Имам, Н. Д. Вервейко, С. А. Ноаман //VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела 16 июня – 21 июня 2014 г., Чебоксары, 265с. - с.11-15.

35. Аль Имам А. А. Течение микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре при условий качения представительного элемента на стенках/ А. А. Аль Имам // Вестник ВГУ. Серия: Физика, математика.

36. Аль Имам А. А. Течение микроструктурного вязкопластичного материала в плоской трубе в условиях прилипания и отсутствия микровращения представительного элемента / А. А. Аль Имам, С. А. Ноаман // IX международная научно-практическая конференция «Инновации в науке: применение и результаты» 17 -18 октября 2014 г., Новосибирск, Россия

37. Аль Имам А. Влияние микроструктуры вязкопластического материала на форму течения в круглой трубе/ А. Аль Имам// Воронежский

государственный университет. Материалы международной конференции (Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2014). – 435С., С. 21–24.

38. Аль Имам А. Математическая модель механического капиллярного заполнения нанотрубок/ А. Аль Имам // Воронежский государственный университет. Материалы международной конференции (Воронежская зимняя матемаическая школа –2014).
39. Аль Имам А., Вервейко Н.Д., Шашкин А.И. Построение поля скоростей продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в трубе эллиптического сечения методом малого параметра/ А. Аль Имам, Н.Д. Вервейко, А.И. Шашкин // Материалы Международной конференции. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Воронеж 12 – 14 декабря 2013 г.
40. Аль Имам Адель А. Абед Ал-Вахаб, Вервейко Н.Д. Асимптотический анализ продольного течения микроструктурного вязкопластического материала в кольцевом зазоре/ Адель А. Абед Ал-Вахаб Аль Имам, Н.Д. Вервейко // (Воронеж) Сборник: Современные теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы (Понтрягинские чтения – XXIV) . Воронеж , 2013. – 246 с., с.229-230.
41. Аль Имам Адель А. Абед Аль Вахаб. Послойное течение микроструктурного материала в канале вблизи действия сил поверхностного натяжения / Адель А. Абед Аль Вахаб Аль Имам // Вестник чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2014. №3 (21). С.144-148.
42. Аль Имам Адель А. Продольное течение вязкопластического микроструктурного материала в трубопроводах кругового поперечного сечения/ Адель А. Аль Имам// Вестник факультета прикладной математики информатики и механики. – Вып. 9, ч. II; Воронежский

государственный университет; факультет прикладной, математики информатики и механики. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. – 224 с., с.3 – 9.

43. Аль Имам Адель А., Вервейко Н.Д. Особенности продольного течения вязкопластического материала с учетом его микроструктуры в кольцевом зазоре/ Адель А. Аль Имам, Н.Д. Вервейко// Вестник чувашского государственного педагогического университета. им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 1 (15). – 228 с., с.3 –11.
44. Амензаде Ю. А. Теория упругости. Учебник для университетов / Ю.А. Аменадзе. – 3-е доп. - М.: высшая школа, 1976. - 272 с.
45. Артемов М. А. Вариационные принципы в механике сплошной среды: учеб. пособие для вузов / сост. : М.А. Артемов, Ю.М. Мяснянкин, Т.Д. Семыкина.— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011 .— 56 с.
46. Артемов М. А. Выбор языка программирования для реализации математических задач, использующих работу с матрицами / М.А. Артемов, Д.Е. Кочкин, Н.А. Проскурякова // Из режима функционирования - в режим развития : сб. науч. тр. регион. межвуз. науч.-практ. конф. в 2-х ч. (Воронеж, 23-26 апр. 2007) .— Воронеж, 2007 .— Ч. 2. - С. 56-59.
47. Артемов М. А. Математическое моделирование в задачах физики, механики, технологиях / М.А. Артемов, А.Г. Баскаков, А.В. Крутов // Вестник физико-математического факультета Елецкого гос. ун-та им. И.А. Бунина.— Елец, 2007 .— Вып. 2. - С. 66-76.
48. Артемов М. А. Математическое моделирование и компьютерный эксперимент : метод. пособие для студентов 3-5 курсов по спец. 010200 и 010500 / Сост. М.А. Артемов, Е.Н. Коржов — Воронеж, 2001 .— 65 с.
49. Артемов М. А. Метод малого параметра в задачах теории упрочняющегося упругопластического тела / М.А.Артемов, В.В.Корзунина, М.С.Лопасов, Е.В.Шестопалова // Авиакосмические

технологии "АКТ-2003", г.Воронеж, 24-26 сент. 2003г.: Тр. четвертой российской науч.-техн. конф. и шк. молодых ученых, аспирантов и студен. — 2003 .— Ч. 1 .— С. 144-147.

50. Артемов М. А. Моделирование волновых процессов в пористой среде / М.А. Артемов, Л.А. Кукарских // Вестник Воронежского государственного технического университета.— Воронеж, 2013 .— Т. 9, № 2. - С. 123-127 .— ISSN 1729-6501 .— 0,3 п.л.
51. Артемов М. А. Общие принципы графических пользовательских интерфейсов. Роль и влияние аппаратных компонентов на дизайн графического интерфейса / М.А. Артемов, А.А. Чиченин // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы XII Междунар. науч.-метод. конф., 9-10 февр. 2012 г., г. Воронеж .— Воронеж, 2012 .— Т. 1 : 3-я шк.-конф. "Информатика в образовании". - С. 22-23.
52. Артемов М. А. Работа с Unicode строками в Yava / М.А. Артемов, А.П. Якубенко // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сб. тр. международ. шк.-семинара, 24-28 мая 2004 г., Воронеж. — 2004 .— Ч. 1, т. 1 .— С. 30-34.
53. Артемов М. А. Разработка компонентов в Delphi : учеб.-методическое пособие для вузов / сост. : М.А. Артемов, Г.Э. Вощинская, В.Г. Рудалев .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011 .— 56 с.
54. Артемов М.А. Модели пластических материалов / М.А.Артемов, О.Д.Горбенко // Вестник факультета прикладной математики и механики. — 2002 .— Вып. 3 .— С. 9-16.
55. Артемов М.А. О постановке задач исследования существования состояния деформируемого тела, сохранности его формы и сходимости метода малого параметра / М.А.Артемов, О.Д.Горбенко, Н.В.Минаева // Вестник факультета прикладной математики и механики. — 2000 .— Вып.2 .— С.12-16.
56. Астахова И. Ф. Автоматизированный учебный курс "Базы данных и

экспертные системы" : свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Воронеж. гос. ун-т; И.Ф. Астахова, Ю.Л. Фалалеева .— М., 2010 .— (№ 2009617355; дата поступления 22.12.09; зарегестрировано 18 февр. 2010 г.)

57. Астахова И. Ф. Компьютерные науки. Деревья, операционные системы, сети : учебное пособие / И.Ф. Астахова, И.К. Астанин, И.Б. Крыжко, Е.А. Кубряков .— Москва : Физматлит, 2013 .— 88 с. —
58. Астахова И. Ф. Язык С + : Пробное учеб. пособие / И.Ф.Астахова, С.В.Власов, В.В.Фертиков, А.В.Ларин .— Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2001 .— 150 с.
59. Аэро Э. Л. Ассиметричная гидромеханика / Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский // Прикл. мат. и мех., Т. 29, № 2, 1965. С. 297-308.
60. Бабкин А. В. Основы механики сплошных сред: Учебник для втузов // А. В. Бабкин, В. В. Селиванов В. В. - 2-е изд., испр. в 3 томах. - Т. 1 - М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. - 376 с.
61. Бахвалов Н. С. Численные методы .- М.: Наука, 1973. 631 с.
62. Бахвалов Н. С. Осреднение процессов в периодических средах / Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко. - М.: Наука, 1984. - 352 с.
63. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. - 5-е изд. - М: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. - 636 с.
64. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел / Дж. Ф. Белл. - ч. 2. - М.: Наука, 1984. - 432 с.
65. Белл ДЖ. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел / ДЖ. Ф. Белл. - ч. 1. - М.: Наука, 1984. - 597 с.
66. Белоцерковский О. М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. - М.: Наука, Главная редакция Физико-математической литературы, 1982. - 392 с.
67. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. / Г. Биркгоф - М.: Издательство иностранной литературы, 1963. - 244 с.
68. Блаттер . Вейвлет – анализ. Основы теории. М.: техносфера. -2006-

271с.

69. Буренин А. А. Об условиях существования поверхностей разрывов необратимых деформаций в упругопластических средах / А.А. Буренин, О.В. Дудко, К.Т. Семенов // ПМТФ. - 2009. - Т.50. - №. - С. 176-185.
70. Буренин А. А. Ударные волны в изотропном упругом пространстве / А. А. Буренин, А. Д. Чернышев // ПММ. - 1978. - Т.42. - вып.4 - С.711-717.
71. Буренин А. А. Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А. А. Буренин, В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2009. - вып. 4 - ч.2 - с. 14-24.
72. Быкова М. И. Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры: монография /М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. - 192 с.
73. Ван-Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. - М.: Мир, 1967-310с.
74. Вервейко Н. Д., Ноаман С. А., Шашкин А. И. К устойчивости формы сдвигового течения микроструктурной вязкой жидкости в узких криволинейных каналах. - Вестник ВГУ. Серия физика математика, 2014 № 1, 56-63 с.
75. Вервейко Н. Д. Влияние микроструктуры упругого материала на его деформирования / Н. Д. Вервейко, С. А. Шашкина // Вестник СамГУ. - Естественная серия. - 2009. - № 4(70) - с. 101 - 113.
76. Вервейко Н. Д. Влияние однородной микроструктуры материалы на его деформирование и течение / Н. Д. Вервейко, А. А. Воронков, М. И. Быкова// Вестник ВГУ, Серия: Физика, математика. - 2005. - № 2. - с. 111-118.
77. Вервейко Н. Д. Влияние характерного линейного размера микроструктуры и времени релаксации на переходные процессы в

тонких слоях / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Вестник ВГУ, серия: Физика. Математика. - 2013. - № 2. - с. 141-147.

78. Вервейко, Н. Д. Лучевая теория упруговязкопластических волн и волн гидроудара / Н. Д. Вервейко. Воронеж: Воронежский государственный университет, 1997. - 204 с.

79. Вервейко, Н. Д. Математическое моделирование поведения сплошной среды с учетом микроструктуры и времени релаксации / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Механика и процессы управления. Том 1. Материалы XXXXII Всероссийского симпозиума. - М.: РАН, 2012. - С. 111-122.

80. Вервейко, Н. Д. О построении одной квазимодели механики сплошной среды / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов международной конференции. - Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. - с. 94-96.

81. Вервейко Н. Д. Расчет влияния микроструктуры жидкости и времени релаксации на ее течение вдоль линии тока средствами Math Cad Prime 1.0 / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов //Теоретическая и прикладная механика. - Выпуск 27. - Минск: БНТУ, 2012. - С. 155 -160.

82. Вервейко Н.Д. Учет микроструктуры материала и его инерциальных свойств в моделях механики сплошной среды / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов // Современные методы теории краевых задач:материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения XXII». Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. - с. 39-41.

83. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. - изд. 4-е - М.: Наука, 1981. - 512 с.

84. Владимиров В. С. Уравнения математической физики: Учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. - 2-е изд., стереотип. - М.:

ФИЗМАТЛИТ, 2004. -400 с.

85. Гаркунов Д.Н. Триботехника: Учебник для ВТУЗов. – 2-е изд., - М.: Машиностроение, 1989. – 328 с.
86. Годунов С. К. Рябенький В. С. Разностные схемы. Введение в теорию .- М.: Наука, 1973.-400с.
87. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды / С. К. Годунов.- М.: Наука, 1978. - 303 с.
88. Годунов С. К. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения / С. К. Годунов. - Новосибирск: Научная книга, 1998. - 280 с.
89. Головнева Е. И. Особенности применения методов механики сплошных сред для описания наноструктур / Е. И. Головнева, И.Ф. Головнев, В.М. Фомин // Физическая мезомеханика. - 2005. - .№ 5. - С. 47-54.
90. Демидов С. П. Теория Упругости: Учебник для вузов / С. П. Демидов С.П. (1979) - М.: Высшая школа, 1979. - 432 с.
91. Димитриенко Ю. И. Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов / Ю. И. Димитриенко, А. П. Соколов // Математическое моделирование - 2012. - т. 24. - № 5. - С. 3-20.
92. Дородницын Л. В. Аппроксимации квазигазодинамической системы уравнений, приводящие к явным алгоритмам / / Математическое моделирование. - 2006. - т. 18. - № 4. - с. 77 - 88.
93. Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Лекции по математическим моделям и численным методам в динамике газа и жидкости / Т. Г. Елизарова. - М.: Научный мир,2007. - 350 с.
94. Елизарова Т. Г. Лекции. Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений / Т. Г. Елизарова. - М.: Физический факультет МГУ, 2005. - 224 с.

95. Еняшин А.Н., Ивановский А.Л. Нанотубулярные композиты: моделирование капиллярного заполнения нанотрубок дисульфида молибдена молекулами $TiCl_4$. Наносистемы: Физика, Химия, Математика, 2010 Том 1, №1, с. 63-71.

96. Жилин, П. А. Математическая теория неупругих сред / П.А. Жилин // Успехи механики. - 2003. - Т. 2. - № 4. - С. 3-36.

97. Жилин, П. А. Основные уравнения теории неупругих сред. / П. А. Жилин // Сб.: Тр. ХУН! летней школы «Актуальные проблемы механики». С.-Пб., 2001. - с. 14-58.

98. Жилин, П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики / П. А. Жилин. - СПб.: Питер, 2003. - 340 с.

99. Задорожний В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными .— Воронеж : Б.и., 2000 .— 368с. — Тираж 150. 23п.л. — ISBN 5-9273-0032-4.

100. Задорожний В.Г. Метод малого параметра для уравнения Риккати со случайными коэффициентами / В.Г. Задорожний // Межвузовский сборник трудов семинара по фундаментальному и прикладному анализу .— Старый Оскол, 2006 .— С. 101-105.

101. Задорожний Владимир Григорьевич. Об аналитичности решения плоской упругопластической задачи / В.Г. Задорожний, А.В. Ковалев, А.Н. Спорыхин // Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела .- М., 2008 .- № 1. - С. 138-146.

102. Захаров Е. В, Уравнения математической физики: учеб. для студ. высш. учеб. заведений / Е. В. Захаров, И. В. Дмитриева, С. И. Орлик. - М.: Издательский центр «Академия», 2010. - 320 с.

103. Иванова Е. А. Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решеток при учете моментных взаимодействий на микроуровне / Е.А. Иванова, А.М. Кривцов, Н. Ф. Морозов // Прикладная математика и механика. - 2007. - т. 71 - № . - с. 595-615.

104. Ивлев Д. Д. Механика пластическая сред : в 2 т. т. z.
105. Ивлев Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела /Д.Д.Ивлев, Л.В.Ершов. – М.:Наука, 1978-208 с.
106. Ивлев, Д.Д. Механика и пластических сред /Д.Д. Ивлев – М: Физматлит, 2001-т. 2. 448с.
107. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. - М.: Машиностроение 1975-559с.
108. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды: Учебник / А. А. Ильюшин. - 3-е изд. - М.: Издательство МГУ, 1990. - 310 с.
109. Kucaba-PiEetal A. Flows in microchannels / A. Kucaba-PiEetal, Z. Walenta, Z. Peradzynski// TASK Quart. , V. 5, № 2, 2001.-с. 179-189.
110. Карташев А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. - М.: Наука, 1979. - 288 с.
111. Клайн С. Дж. Подобие и приближённые метод/ С. Клайн. -М.: Мир, 1968. - 304 с.
112. Кондауров В. И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями.- Прикл. механика и техи. физика. – 1982.- № 4.-с.133-139.
113. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж.Коул. - М.: Мир, 1972. - 274 с.
114. Кривцов А. М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой / А. М. Кривцов. - М.: Физматлит, 2007 - 304с.
115. Кривцов А.М. К теории сред с микроструктурой / А.М. Кривцов //Труды СПБГТУ. - 1992. - № 443. - С. 9-17.
116. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. / И. А. Кунин. - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1975. - 416 с.
117. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. - Государственное издательство технико-теоретической литературы,

Москва, 1954, 795с.

118. Ландау Л.Д. Теоретическая физика в Х-ти томах. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. - 3-е изд., перераб. - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1986. - 736 с.
119. Ландау Л.Д. Теоретическая физика в Х-ти томах. Т. УН Теория упругости: Учеб. пособие / Л. Д. Ландау, Т. Ф. Лифшиц. - 4-е изд., испр. и доп. - М.:Наука, 1987. - 248 с.
120. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : наука ,1970-904с.
121. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1970. - 904 с.
122. Лойцянский, Л.Г. Ламинарный пограничный слой / Л.Г. Лойцянский. - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1952. - 479 с.
123. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов / Л.Г. Лойцянский. -7-е изд., испр. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.
124. Ма-К-Коннел, А. ДЖ. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел. - М.: Главное издательство Физико-математической литературы. - 1963. - 411 с.
125. Мартинсон Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов / Л. К. Мартинсон, Ю.И. Малов. - 2-е изд. - М.: Издво МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. - 368 с.
126. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Марчук Г. И.- М.: Наука, 1980.-456 с.
127. Митчел Уэйт. МКЭ решения уравнений в частных производных . М.: Мир.
128. Найфэ А.Х. Введение в метод возмущений / А. Х. Найфэ. М.:Мир, 1984. - 535 с.
129. Негрескул С.И. Моделирование зернистых сред методом элементной динамики / С. И. Негрескул, С. Г. Псахье, С. Ю. Коростелев, В. Е. Панин // АН СССР. СО. Том. науч. центр., № 39, 1989. С. 1-27.
130. Никитин Л.В. Статика и динамика твёрдых тел с сухим трением. – М.:

«Московский лицей», 1998. – 272 с.

131. Новацкий В. Теория упругости: Пер. с пол. / В. Новацкий. - М.:Мир, 1975. - 872 с.
132. Новожилов И.В. Методы формирования приближенных математических моделей движения / И. В. Новожилов // Фундаментальная и прикладная математика. - 2005. - т. 11. - № 7. - с. 5-9.
133. Новожилов И.В. Об уточнении предельных моделей механики /И. В. Новожилов // Нелинейная механика. - М.: Физматлит, 2001. - С. 174-191.
134. Павлов А. Н. Разностные схемы с кинетически-согласованной искусственной вязкостью для решения уравнений Навье-Стокса на криволинейных ортогональных сетках / А.Н. Павлов, А.С. Чайка, Четверушкин Б.Н. // Математическое моделирование. - 1993. - том 5, № 4. - с. 57-75.
135. Победря Б.Е. Модели механики сплошных сред. / Б. Е. Победря // Фундаментальная и прикладная математика.-1997. - т. 3 -,№ 1.-с.93127.
136. Победря Б.Е. Элементы структурной механики деформируемого твердого тела / Б. Е. Победря / / Математическое моделирование систем и процессов. - 1996. -,№ 4. - с. 66-73.
137. Победря Б.Е. Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды / Б.Е. Победря // Вестн. Моек. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. - 2005. -,№ 1. - С. 54-59.
138. Полянин А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 256 с.
139. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 576 с.
140. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения /Л. С. Понтрягин. - изд. 4-е - М.: Наука, 1974. - 331 с.

141. Просветов В.И. Математические модели механики сплошной среды с учетом микроструктуры материала / В. И. Просветов // Труды молодых ученых: секция математика. - 2010. - В. 1-2 - с. 26-27.

142. Просветов В.И. Поведение материалов в тонких переходных слоях с учетом конечности представительных элементов и времени релаксации/ В. И. Просветов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. - с. 325-328.

143. Путеводитель Прандтля по гидроаэродинамике. - М.: миц «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. -776 с.

144. Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье-Стокса / В.В.Пухначев // Успехи механики. - 2006. -.№ 1. - С. 6-76.

145. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1974. -744 с.

146. Ревуженко А.Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандад анализ / А.Ф. Ревуженко. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 428с.

147. Рейнер М. Реология / М. Рейнер. - М.: Наука, Главная редакция Физико-математической литературы, 1965. - 224 с.

148. Рогова, Б. В. Обзор моделей вязких внутренних течений / Б. В. Рогова, И. А. Соколова // Математическое моделирование.-2002.- т.14 .№1 - с.41-72.

149. Рябченков JI.Н. , Кузнецов А.В. Закономерности деформирования песчаного грунт при низкочастотных воздействиях. Основания и фундаменты в геологических условиях Урала / - Пермь,1989.с.147-156.

150. Ряжских В.И. Динамика фильтр-адсорбционного процесса очистки

мелкодисперсионных взвесей с растворяющей твердой фазой / В.И. Ряжских, О.А. Семенихин, Д.А. Горьковенко // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. - 2007. - т. 50. - № 2. - С. 70-72.

151. Самарский А.А. Численные методы математической физики/ А.А. Самарский, А.В Гулин. – М.: Научный мир , 2000-316 с.
152. Самарский А.А., Попов Ю.П., Разностные методы решения задач газовой динамики .- М.: Наука, 1980. - 360 с.
153. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. - 2-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 320 с.
154. Самарский А. А. Разностные методы задач газовой динамики: Учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. - М.: Наука,1992.- 424с.
155. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А. В. Гулин. - М.: Наука. Главная редакция физикоматематической литературы, 1973. - 416 с.
156. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред / Л. И. Седов // Успехи математических наук. - 1965. - т. XX. – вып. 5(125). - с. 121-180.
157. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Том 1 / Л. И. Седов. - М.Наука, 1970. - 492 с.
158. Седов Л. И. Механика сплошных сред. Том 2 / Л. И. Седов. - М. Наука, 1970. - 568 с.
159. Седов Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы / Л. И. Седов // ПММ. - 1968. - Т. 32. - № 5. - С. 771-785.
160. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. - 4-е изд. - М.: Наука, Главная редакция Физико-математической литературы. - 1966. - 443 с.
161. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применение в

геометрии и в механике сплошных сред / И. С. Сокольников - М.:Наука,1971.- 376с.

162. Спорыхин А.Н, Шашкин А.И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 232 с.
163. Справочник по триботехнике / Под общ.ред. М. Хебды, А.В. Чичинидзе. В 3т. Т.1 Теоретические основы. – М.: Машиностроение, 1989. – 400 с.
164. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере-М.: изд-во Мир, 1976. С. 145-151.
165. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А. Н.Тихонов, А. А. Самарский. -7-0е издание - М.: Наука, 1977. -735 с.
166. Томас Т. Пластическое течение и разрушение а твёрдых телах. М.: Мир, 1964.
167. Успенский В.А. Что такое не стандартный анализ? / В. А. Успенский - М.: Наука, 1987. -128 с.
168. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. - М.: Государственное издание Физико-математической литературы, 1959. - 364 с.
169. Хан Х. Теория упругости: основы линейной теории и ее применения: Пер. с нем. / Х. Хан. - М.: Мир, 1988. - 344 с.
170. Черняк В. Г. Механика сплошных сред: Учеб. пособ.: для вузов. /В. Г. Черняк - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 352 с.
171. Четверушкин Б.Н. Минимальные размеры в задачах механики сплошной среды / Б.Н. Четверушкин / / Математическое моделирование. 2005. - Т.17 - ,№ 4 - с. 27-39.
172. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред / Б. Н. Четверушкин / / Математическое моделирование. - 2012. - т. 24. -, № 11 - С. 33-52.
173. Шашкина С.А. Формулировка задачи теории упругости для

материалов с микроструктурой. / Сб. «Математические модели и операторные уравнения», Т.3, Воронеж, 2005, С.81-86.

174. Шемякин Е.И. Зональная дезинтеграция горных пород вокруг подземных выработок / Е. И. Шемякин, М. В. Курленя, В. Н. Опарин // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, Ч. 1, № 3, 1986.
175. Шемякин Е.И. Эффект зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземных выработок / Е. И. Шемякин, М. В. Курленя, В. Н. Опарин // ДАН СССР, Т. 289, № 5, 1986.
176. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1974. -711 с.
177. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении / В. И. Шуликовский. - М.: Главное издательство Физико-математической литературы. -1963. - 540 с.
178. Эринген А.К. Теория микрополярной упругости / А. К. Эринген// Разрушение. - 1975. - Т. 2. - С. 646-751.
179. Виктор Зиборов "Visual Basic 2010 на примерах" Издательство: БХВ-Петербург Год издания: 2010

Листинг программы:

```
Public Class Form1
    Public a(50, 50), d(50), x(50), g(50), g0, dt2, sg,
ras As Double
    Public n As Integer

    Private Sub Button1_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button1.Click
        Dim i, j As Integer
        'создать матрицу коэффициентов и вектор b
        a(1, 1) = a11 : a(1, 2) = a12 : a(n, n - 1) =
an1 : a(n, n) = an2
        d(1) = 0 : d(n) = 0
        For i = 3 To n
            a(1, i) = 0
            a(n, n - i + 1) = 0
        Next
        For i = 1 To n
            TextBox1.Text = TextBox1.Text + Format(a(1,
i), "0.0000") + "  "
        Next i
        TextBox1.Text = TextBox1.Text +
Environment.NewLine

        TextBox2.Text = TextBox2.Text + Format(d(1),
"0.0000") + Environment.NewLine


        For i = 2 To n - 1
            For j = 1 To n
                If Math.Abs(i - j) > 1 Then
                    a(i, j) = 0
                Else
                    If j = i - 1 Then a(i, j) = ((1 -
dt1 / sg) / (2 * sg ^ 2)) * ((1 + dt2 ^ 2 / sg ^ 2) +
sg * (1 + 2 * dt2 ^ 2 / sg ^ 2) * (1 / g(i - 1)))
                    If i = j Then a(i, j) = 2 / sg ^ 2
* ((1 + dt2 ^ 2 / sg ^ 2) + sg * (1 + 2 * dt2 ^ 2 / sg
^ 2) * (1 / g(i)))
                    If j = i + 1 Then a(i, j) = ((1 -
dt1 / sg) / (2 * sg ^ 2)) * ((1 + dt2 ^ 2 / sg ^ 2) +
sg * (1 + 2 * dt2 ^ 2 / sg ^ 2) * (1 / g(i + 1)))
                End If
```

```
                TextBox1.Text = TextBox1.Text +
Format(a(i, j), "0.0000") + "  "
            Next j
            TextBox1.Text = TextBox1.Text +
Environment.NewLine
            d(i) = -1
            TextBox2.Text = TextBox2.Text +
Format(d(i), "0.00") + Environment.NewLine


        Next i

        For i = 1 To n
            TextBox1.Text = TextBox1.Text + Format(a(n,
i), "0.0000") + "  "
        Next i
        TextBox1.Text = TextBox1.Text +
Environment.NewLine
        TextBox2.Text = TextBox2.Text + Format(d(n),
"0.00") + Environment.NewLine

        'Выполнить метод прогонку
        a(1, 2) = a(1, 2) / a(1, 1)
        d(1) = d(1) / a(1, 1)
        For i = 1 To n - 1
            a(i, i + 1) = a(i, i + 1) / (a(i, i) - a(i,
i - 1) * a(i - 1, i))
            d(i) = (d(i) - a(i, i - 1) * d(i - 1)) /
(a(i, i) - a(i, i - 1) * a(i - 1, i))

        Next i

        d(n) = (d(n) - a(n, n - 1) * d(n - 1)) / (a(n,
n) - a(n, n - 1) * a(n - 1, n))

        x(n) = d(n)
        For i = n - 1 To 1 Step -1
            x(i) = d(i) - a(i, i + 1) * x(i + 1)
        Next i

        Button3.Enabled = True

    End Sub
```

```
    Private Sub Button3_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button3.Click
        Dim i, j As Integer
        'Показать матрицу и вектор b после выполнения
метод прогонки
        TextBox1.Text = ""
        TextBox2.Text = ""
        TextBox3.Text = ""

        For i = 1 To n
            For j = 1 To n
                TextBox1.Text = TextBox1.Text +
Format(a(i, j), "0.0000") + "  "
            Next j
            TextBox1.Text = TextBox1.Text +
Environment.NewLine
            TextBox2.Text = TextBox2.Text +
Format(d(i), "0.0000") + Environment.NewLine
            TextBox3.Text = TextBox3.Text + "x" +
Str(i) + "=" + Format(x(i), "0.0000") + "  "
        Next i

    End Sub

    Private Sub Button2_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button2.Click
        'Ввод N и сигма
        sg = InputBox("Есть значения по умолчанию, как
в ниже", "Дайте значение  σ", "0.1")
        n = InputBox("Есть значения по умолчанию, как в
ниже", "Дайте значение  N", "10")

    End Sub

    Private Sub Button4_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button4.Click
        Dim i As Integer
        'Ввод X0
        g0 = InputBox("Дайте значение X0", "Ввод X0",
"0.1")
        dt1 = (1 - g0) / n
```

```
        For i = 1 To n
            g(i) = g0 + i * dt1
        Next


    End Sub

    Private Sub Button5_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button5.Click
        'Ввод Шаг сетки Дельта
        dt2 = InputBox("Есть значения по умолчанию, как
в ниже", "Дайте значение  δ", "0.01")

    End Sub

    Private Sub Button6_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button6.Click
        Form2.Show()
    End Sub

    Private Sub Button7_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button7.Click
        'Послать данные на странице графика
        Dim r(n, 2), i As Double
        For i = 0 To n
            r(i, 0) = g(i) : r(i, 1) = -x(i)
        Next
        Dim oExcel As Object
        Dim oBook As Object
        Dim oSheet As Object

        oExcel = CreateObject("Excel.Application")
        oBook = oExcel.Workbooks.Add


        oSheet = oBook.Worksheets(1)
        oSheet.Range("A1").Value = "X"
        oSheet.Range("B1").Value = "Y"

        oSheet.Range("A2").Resize(n + 1, 2).Value = r

        oBook.SaveAs("d:\aa\" & "Book2.xls")
```

```
        oSheet = Nothing
        oBook = Nothing
        oExcel.Quit()
        oExcel = Nothing
        GC.Collect()
    End Sub


    Private Sub Button8_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button8.Click
        Dim i As Integer
        'Вычислить расход течения материала
        ras = 0
        For i = 1 To n
            ras = ras + (g(i) * (-x(i)))
        Next
        TextBox4.Text = ras
    End Sub
End Class
   Private Sub Button9_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button9.Click
        'Сохранение результатов и дать  новую
последовательность
        t = t + 1
        rasxod(t) = ras

    End Sub

    Private Sub Form1_Load(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
MyBase.Load
        'Предоставление начальное значение
последовательности результатов
        t = 0
    End Sub

    Private Sub Button10_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button10.Click
        'Готовление программного интерфейса для новых
ввода
        TextBox1.Text = ""
        TextBox2.Text = ""
```

```
        TextBox3.Text = ""
        TextBox4.Text = ""
        Button1.Enabled = False
        Button3.Enabled = False
        Button8.Enabled = False
        Button7.Enabled = False
        Button9.Enabled = False

    End Sub


    Private Sub Button11_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button11.Click
        Dim large As Double
        Dim i As Integer
        'Нахождение максимальный расход
        large = rasxod(1)
        For i = 2 To t
            If rasxod(i) > large Then large = rasxod(i)
        Next
        TextBox5.Text = large

    End Sub

    Private Sub Button12_Click(ByVal sender As
System.Object, ByVal e As System.EventArgs) Handles
Button12.Click
        Dim small As Double
        Dim i As Integer
        'Нахождение минимальный расход
        small = rasxod(1)
        For i = 2 To t
            If rasxod(i) < small Then small = rasxod(i)
        Next
        TextBox6.Text = small
    End Sub
End Class
```

Приложение 1

Послойное течение микроструктурного материала в канале вблизи действия сил поверхностного натяжения.

Введение

Экспериментально и на основе расчета движения дискретных молекул внутри нанотрубок установлено их послойное движение причем у стенок материал движется быстрее чем в центре [13,15,26,27,95]. Учитывая совместный характер движения молекул предлагается моделировать процесс движением микроструктурного вязкого материала в плоском зазоре под действием сил поверхностного натяжения, втягивающих молекул внутрь нанотрубок.

Математическая модель движения микроструктурного материала

Отличительной особенностью течения и деформирования микроструктурных материалов, является учет характерных размеров h представительных элементов $\Delta V = h^3$ в выражениях для деформации, скоростей деформаций и в самих уравнениях движения [72].

$$e_{ij} = e_{ij}^c + \frac{h^2}{6}\Delta e_{ij}^c;$$
$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j + \frac{h^2}{6}\Delta\,\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0 \qquad (1)$$

здесь: $e_{ij}^c = \left(1/2\right)\left(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i\right)$ тензор скоростей деформаций Коши,

$\Delta = \partial^2/\partial x_j \partial x_j$; v_j - вектор скорости, σ_{ij} - тензор напряжений (i,j=1,2,3).

Закон Ньютона, связывающий напряжения со скоростями деформаций для несжимаемой вязкой жидкости

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij};\ e_{kk} = 0. \qquad (2)$$

замыкает систему дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей и позволяет рассматривать движение такого материала в терминах скорости v_i.

Рассмотрим далее движение материала в плоской трубе шириной 2H под действием перепада давления $\partial P / \partial z$, вызванного действием силы поверхностного натяжения [72].

Случай движения материала в окрестности мениска квадратичной формы

Оценим втягивающую силу поверхностного натяжения при условии постоянства касательной силы $\overline{F} = \lambda_0 \cdot \overline{\tau}_0$ (рис.1)

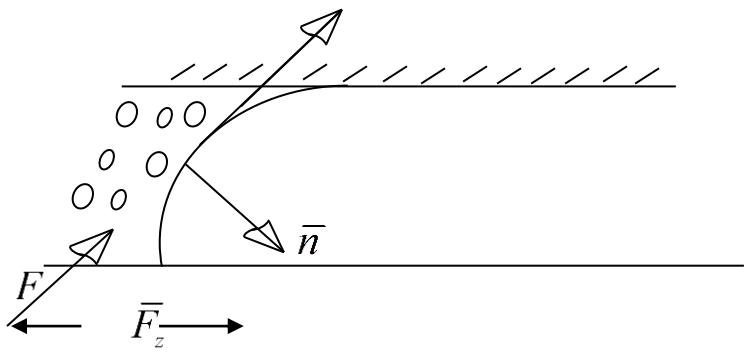


Рис.1 Схематическое изображение формы мениска и сил, порожденных поверхностным натяжением $F = \lambda_0 = const$

Положим вид мениска в форме параболы (a, b – постоянные)

$$f(z, y) = z - \left(a + by^2\right) = 0. \qquad (3)$$

Векторы нормали и касательной к мениску имеют вид

$$\overline{n} = \left(\frac{-2by}{\sqrt{1+4b^2y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4b^2y^2}} \right); \ \overline{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4b^2y^2}}, \frac{2by}{\sqrt{1+4b^2y^2}} \right). \qquad (4)$$

Вектор силы поверхностного натяжения определяется

$$\overline{F} = \frac{\lambda v}{\sqrt{1+4b^2y^2}}(1;2by);\ (y \geq 0)\ . \qquad (5)$$

Далее ограничимся линейным представлением втягивающей силы

$$F_z \cong 2\lambda_0 by. \qquad (6)$$

Уравнение движения микроструктурного материала вблизи мениска примем в вид [38]

$$\delta^2 v^{IV} + v^{II} = \lambda y\text{, где } \lambda = 2\lambda_0 b\ . \qquad (7)$$

Дважды проинтегрировав уравнение (7) получим, просуммировав частное решение уравнения (7) и общее решение однородного уравнения

$$v = C_4 \sin\frac{y}{\delta} + C_3 \cos\frac{y}{\delta} + \left(C_1 - \lambda\delta^2\right)y + C_2. \qquad (8)$$

Из условий симметрии по y выражение (9) следует, что

$$C_4 = 0;\quad C_1 = \lambda\delta^2 \qquad (9)$$

Постоянные C_3 и C_2 найдем из условий наличия ядра течения шириной $y = \breve{H}$ на котором $v'(\breve{H}) = 0$, что означает движение ядра течения со скоростью течения

$$v\left(\breve{H}\right) = v^0 \text{ и значит } v'\left(\breve{H}\right) = 0 \qquad (10)$$

откуда следует, что

$$C_3 = \lambda\delta\breve{H}^2 \Big/ 2\sin\frac{\breve{H}}{\delta}\ . \qquad (11)$$

Постоянную C_2 найдем из условия качения представительного элемента вдоль стенки трубы y=H

$$v(H) - \gamma v'(H) = 0 \qquad (12)$$

из (12) следует, что

$$C_2 = -\lambda\delta\breve{H}^2 \frac{1}{\sin\breve{H}/\delta}\left(\cos\frac{H}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta}\sin\frac{H}{\delta}\right) - \frac{\lambda}{2}H^2\left(\frac{H}{3} - \gamma\right)\ . \qquad (13)$$

Учитывая знание постоянных C_1, C_2, C_3, и C_4 выражение (8) для скорости течения $v(y)$ примет вид

$$w = \frac{2v(x)}{\lambda H^3} = \frac{x^3}{3} + \varepsilon \bar{H}^2 \frac{\cos\frac{x}{\varepsilon}}{\sin\frac{\bar{H}}{\varepsilon}} + \gamma - \frac{1}{3} - \varepsilon \bar{H}^2 \frac{\cos\frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{\bar{\gamma}}{\varepsilon}\right)\sin\frac{1}{\varepsilon}}{\sin\frac{\bar{H}}{\varepsilon}} \qquad (14)$$

здесь: $x = y/H$; $\varepsilon = \delta/H$; $\bar{H} = \frac{\breve{H}}{H}$; $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{H}$.

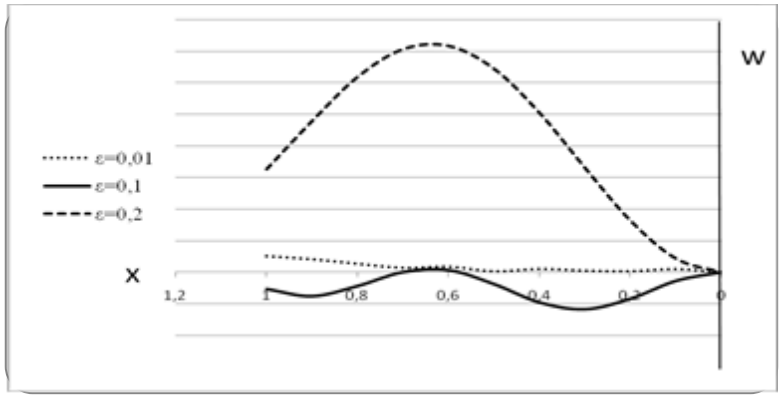


Рис. 2 График скорости течения $w(x)$ для разных ε , $x \in [0;1]$.

Скорость течения микроструктурного материала в окрестности мениска кубической формы.

Положим, что мениск имеет форму кубической параболы, а сама сила поверхностного натяжения является постоянной вдоль формы мениска (рис.1).

$$\Phi_{(yz)} = z - by^3 0 = 0; \quad F_z = \lambda 3by^2 \qquad (15)$$

Уравнение для скорости течения материала в окрестности переднего фронта мениска имеет вид (7)

$$\delta^2 \upsilon^{IV} + \upsilon^{II} = \lambda 3by^2. \qquad (16)$$

Двукратное интегрирование переводит дифференциальное уравнение 4-го порядка для υ в уравнение 2-го порядка с постоянными интегрирования C_1 и C_2

$$\delta^2 \upsilon^{II} + \upsilon = \lambda(b/4)y^4 + C_1 y + \rho_2 \ . \qquad (17)$$

Линейное уравнение (17) имеет точное решение

$$\upsilon(y) = C_3 C_\upsilon \frac{y}{\delta} + C_n \sin\frac{y}{\delta} + \lambda_0 y + 12\lambda_0 \delta y^2 + 12\lambda_0 \delta y^2 + \rho_1 y + \rho_2 - 24\lambda_0 \delta^4 \qquad (18)$$

где $(\lambda b = 4\lambda_0)$.

Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_n зададим следующие граничные условия.

Симметрию течения: $\upsilon(H) = \upsilon(-H)$. (19)

Экстремум скорости на оси течения: $\upsilon'(0) = 0$. (20)

Равенство сил вязкого трения и движущей силы поверхностного натяжения на стенке

$$\sigma_{zy}\Big|_{y=H} = F_z\Big|_{y=H} = \mu\left(\upsilon' + \delta^2\upsilon'''\right)\Big|_{y=H} \quad . \tag{21}$$

Условие качения представительного элемента на стенке

$$\upsilon(H) - \gamma\upsilon'(H) = 0 \quad . \tag{22}$$

Выбранные граничные условия позволяют определить постоянные интегрирования и представить выражение для скорости υ с удержанием величин не выше δ^2 в виде

$$\upsilon(x)/\lambda_0\Big| = x^4 + 12x^2\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon(3-\bar{\mu})}{\bar{\mu}\cos(11\varepsilon)}\left(1 - \cos|x|\varepsilon\right) \tag{23}$$

здесь $\bar{\mu}$ - безразмерный коэффициент вязкости $\varepsilon = \delta/H$, $x = y/H$.

Выражение (23) для скорости течения $\upsilon(x)$, где $x \in [0,1]$, отражает возмущение скорости течения с периодом $\tau = 2\pi\varepsilon$. На рис.3 изображен график скорости $\upsilon(x)$, причем прилегающие к стене слои материала движутся быстрее внутренних.

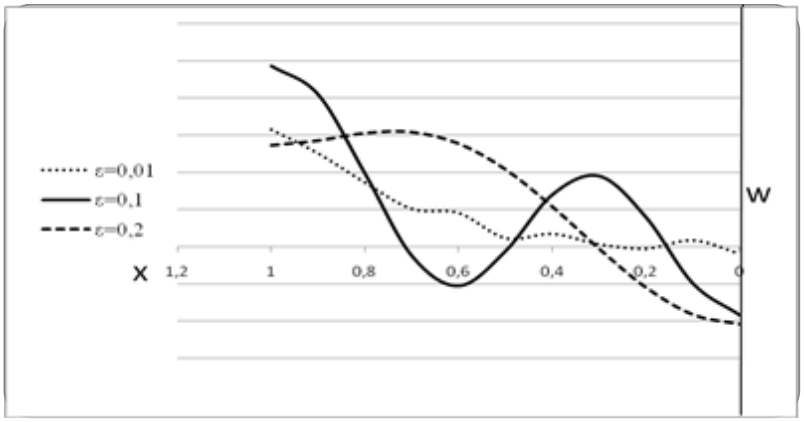


Рис. 3. График безразмерной скорости течения материала при различных значениях параметров.

Выводы

Использование в качестве движущей силу поверхностного натяжения приводит к эффекту увеличения скорости движения вблизи стенок канала в отличие от течения под действием перепада давления. Вид формы мениска передней части движущегося материала влияет на величину скорости. Области локального максимума скорости можно отождествить с движением отдельных молекул в нанотрубке.

Приложение 2

Математическая модель механического капиллярного заполнения нанотрубок

Введение

Одним из способов получения углеродных нанотрубок (УНТ) с внутренним покрытием галогенидами металлов является капиллярное внедрение и медленное охлаждение материала в полости УНТ. Для случая поведения расплава $TiCl_4$ в [95] показано, что он ведет себя как жидкость в свободном состоянии и внутри нанотрубки.

Этот факт позволяет моделировать начало движения материала внутри нанотрубки движением объема переменной длины под действием внешних сил [156, 159]. Молекулярно-динамические расчеты [13, 15, 26, 27] поддерживающие этот подход приведены на рис. 1

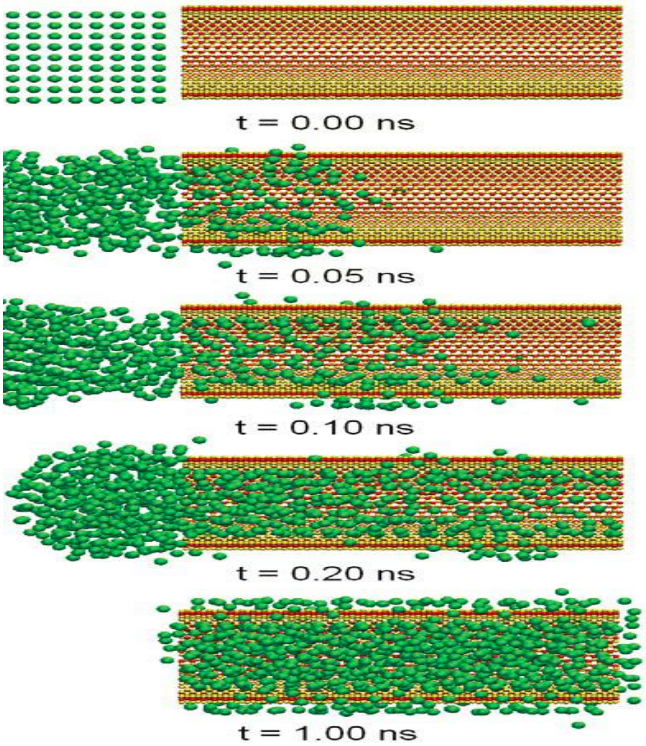


Рис. 1. Стадии процесса заполнения (28,28) MoS2 нанотрубки каплей тетрахлорида титана в разные моменты времени по данным молекулярнодинамических расчетов [1, 7, 10, 22, 24].

Запишем дифференциальное уравнение движения элемента «пробки» длинной из молекул, перемещающейся в нанотрубке под действием сил в соответствии со вторым законом Ньютона

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho \Pi D^2}{4x}\cdot\frac{dx}{dt}\right) = -\text{М}\Pi Dx\cdot\frac{dx}{dt} - \Pi D^2 x^2 K_o + \Pi Df \qquad (1)$$

здесь: со знаком (-) выступают силы вязкого и сухого трения, со знаком (f) действует сила поверхностного натяжения за счет вогнутости мениска переднего среза «пробки», ρ - плотность материала «пробки», μ- коэффициент вязкого сопротивления, K_o - сила сухого трения, D - внутренний диаметр нанотрубки.

В безразмерном виде уравнение для длины $\xi = \frac{x}{D}$ заполнения нанотрубки примет вид $(\xi^2)'' + 2\nu_o(\xi^2)' + x_o\xi^2 = f_o$ (2)

здесь: $2\nu_o$ - безразмерный коэффициент вязкого сопротивления; x_o- безразмерный коэффициент силы сухого трения; f_o- безразмерная сила поверхностного натяжения.

Формулируем 2 задачи:

1. Задача Коши: $\tau = \frac{t}{T} = 0 : \xi_0 = 0$ и $\xi_0' = 0$ (3)
2. Задача возможной остановки процесса заполнения: $\tau = 0;\ \xi_0 = 0;\ \tau = \tau^*;\ \xi^{*\prime} = 0$ (4)

Задача Коши позволяет построить закон заполнения нанотрубки $\xi = \xi(t)$.

Вторая задача позволяет найти время остановки $T = T^* = t^* \cdot \sqrt{\frac{g}{D}}$ и предельную длину заполнения $\xi^* = \frac{x^*}{D}$ нанотрубки.

Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка (2) имеет точное решение:

$$\xi^2 = C_1 \cdot \exp(\lambda, \tilde{\upsilon}) + C_2 \exp(\lambda^2 \tau) + \frac{f_0}{x_0} \quad , \tag{5}$$

где: $\lambda_{1,2} = -\nu_0 \pm \sqrt{\nu_0^2 - x_1}$ - корни характеристического уравнения.

Для случая большей силы вязкого сопротивления решение для закона движения "пробки" $\xi = \xi(T)$ конкретизируется:

$$\xi_1^2 = C_1 \exp(-\nu_0 - \sqrt{\nu_0^2 - x_0})\tau + C_2 \exp(-\nu_0 + \sqrt{\nu_0^2 - x_0})\tau + \frac{f_0}{x_0}. \tag{6}$$

В случае превалирования силы сухого трения $\nu_0^2 < x_0$ (5) представимо в виде:

$$\xi_2^2 = \exp(-\nu_0 \tau)\left(C_1^* Sin\sqrt{x_0 - \nu_0^2}\tau + C^*{}_2 Cos\sqrt{x_0 - \nu_0^2}\tau\right) + \frac{f_0}{x_0}. \tag{7}$$

Рассмотрим случай начального заполнения нанотрубки из состояния покоя (Задача Коши), при τ =0; $\xi(0) = 0$ и $\xi'(0) = 0$, получим уравнение для C_1 и C_2:

$$0 = C_1 + C_2 + \frac{f_0}{x}; \; 0 = \left(-\nu_0 - \sqrt{\nu_0^2 - x_0}\right) \cdot C_1 + \left(-\nu_0 + \sqrt{\nu_0^2 - x_0}\right) \cdot C_2 = 0, \text{ при } \nu_0^2 = x_0;$$

$$0 = C_2^* + \frac{f_0}{x_0}; \; \sqrt{x_0 - \nu_0^2} \cdot C_2^* - \nu_0 \rho_2^* = 0 \quad \text{при } \nu_0^2 < x_0. \tag{8}$$

Из (6) и (8) получим затухающий со временем закон заполнения нанотрубки для $\nu_0^2 > x_0$:

$$\xi_1^2 = \frac{f_0}{2x_0\sqrt{\nu_0^2 - x_0}} \cdot e^{-V_0\tau}\left(\left(\nu_0 - \sqrt{\nu_0^2 - x_0}\right)\exp\left(-\sqrt{\nu_0^2 - x_0}\right)\tau - \left(\nu_0 + \sqrt{\nu_0^2 - x_0}\right)\exp\left(\sqrt{\nu_0^2} - x_0\tau\right) + \frac{f_0}{x_0}\right). \tag{9}$$

При $\tau \to \infty$ достигается предельная глубина заполнения нанотрубки путем непрерывного медленного движения $\xi_\infty^2 = \frac{f_0}{x_0}$. (10)

Из (7,8) получим закон заполнения нанотрубки для $\nu_0^2 < x_0$

$$\xi_2^2 = -\frac{f_0}{x_0} \cdot e^{-V_0 T}\left[C_1\sqrt{x_0 - \nu_0^2}\,T + \frac{\nu_0}{\sqrt{x_0 - \nu_0^2}} \cdot \xi\sqrt{x_0 - \nu_0^2}\,\tau\right] + \frac{f_0}{x_0}. \qquad (11)$$

Как следует из (11) закон заполнения нанотрубки носит гармонический характер и можно найти время $\tau = T^*$, когда заполнение прекратится $\xi_1^2(\tau*) = 0$

, $\sin\sqrt{x_0 - \nu_0^2} = \tau^* = 0$, откуда $\tau^* = \dfrac{\pi}{\sqrt{x_0 - \nu_0^2}}$. (12)

Предельная глубина заполнения нанотрубки определяется при $x_0 > V_0^2$:

$$\xi_{2\infty}^{*2} = \frac{f_0}{x_0}\left(1 - \exp\left(\frac{-\nu_0 \pi}{\sqrt{x_0 - \nu_0^2}}\right)\right). \qquad (13)$$

При учете силы вязкого сопротивления (меньшей силы сухого трения) предельная глубина заполнения нанотрубки $\xi_{2\infty}^{*2}$ тем меньше чем меньше сухое трение $\xi_{1\infty}^{*2}$ ($\xi_{1\infty}^{*2} > \xi_{2\infty}^{*2}$).

На рис. 2 приведены графики предельной глубины $\xi_{2\infty}^{*}$ заполнения нанотрубки. Видно, что с увеличением силы сопротивления глубины протекание падает.

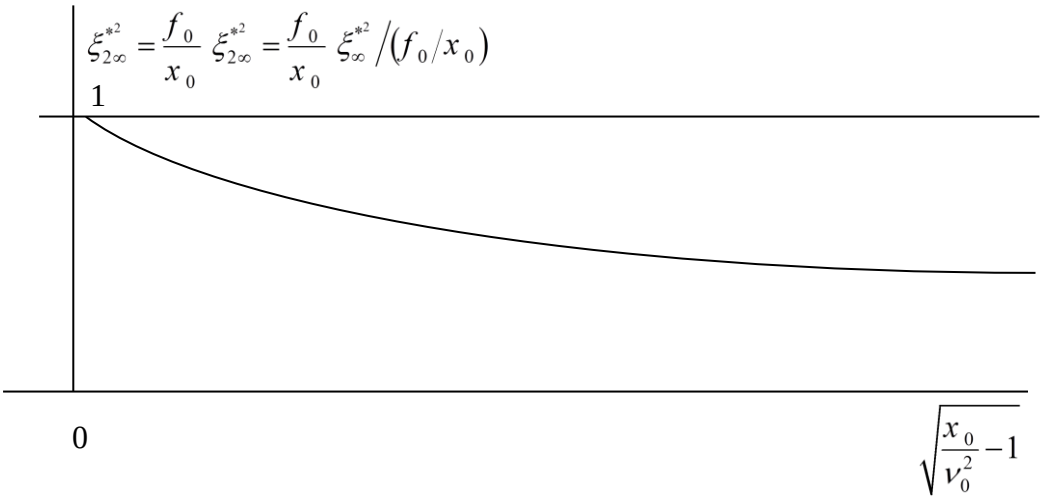


Рис. 2. График зависимости относительной глубины заполнения нанотрубки в зависимости от соотношения $\left(\dfrac{x_0}{\nu_0^2}\right)$ сил сухого и вязкого сопротивлений.

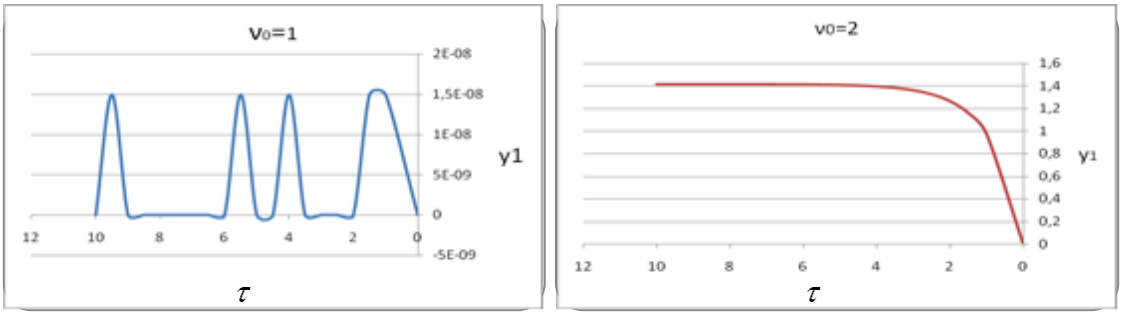


Рис. 3. График глубины полнения нанотрубки при большой силе сопротивления сухого трения.

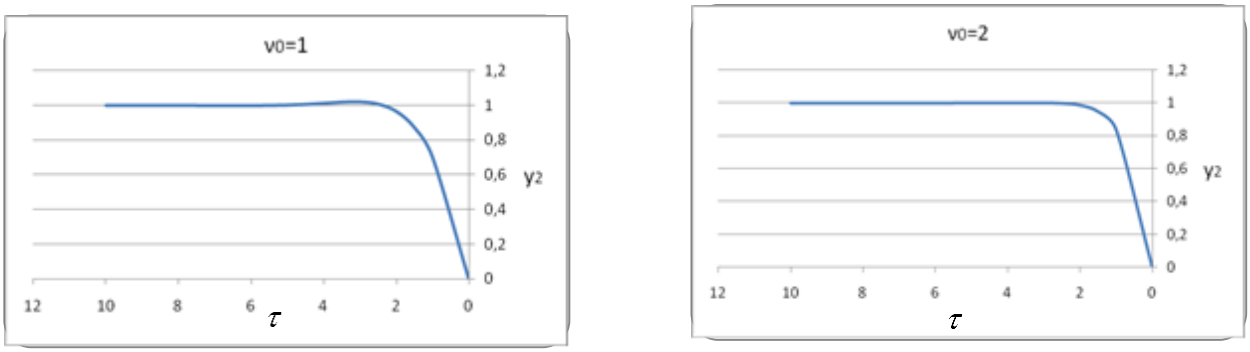


Рис. 4. График глубины заполнения нанотрубки со временем при большой вязкости сопротивления.

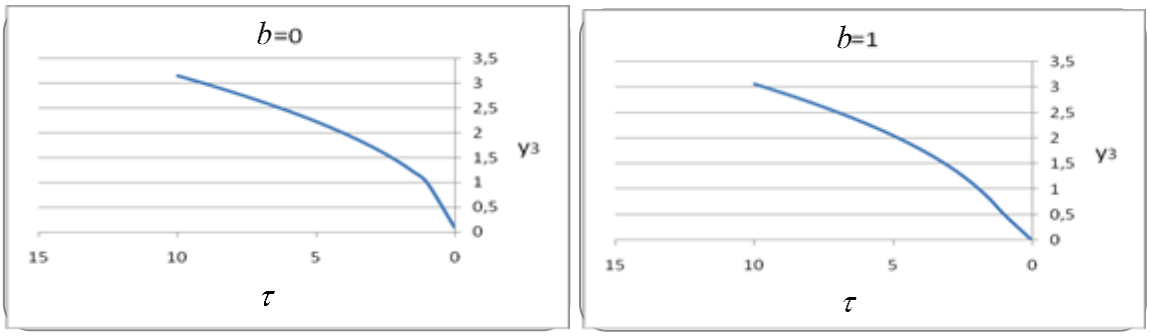


Рис. 5. График числа молекул <N>, проникших в нанотрубку по формуле Уошборна [95].

На рис. 3-4 приведены графики глубины заполнения нанотрубки со временем для двух вариантов

а) коэффициент вязкого сопротивления предполагается больше коэффициента силы сухого трения:

$$y_1 = \xi_1 / \sqrt{f_0 p c_0} = \sqrt{2 + e^{-\nu_0 \tau}(\nu_0 - 1)e^{-\tau} + (\nu_0 + 1)e^{\tau}}\,; \qquad (14)$$

б) коэффициент вязкого сопротивления меньше коэффициента силы сухого трения:

$$y_2 = \frac{\xi_2}{f_0 x_0} = \sqrt{1 - e^{-\nu_0 \tau}(\cos\tau + \nu sin\tau)}\,. \qquad (15)$$

На рис. 5 для сравнения приведен график числа <N> молекул, заполняющих нанотрубку со временем по закону Уошборна

$$y_3 = \frac{\sqrt{\tau}}{1 + b/\sqrt{\tau}}\,. \qquad (16)$$

Из приведенных графиков длины заполнения нанотрубки молекулами и числа <N> молекул, заполнивших нанотрубку со временем, следует: 1) Аналогия длины «пробки» из молекул числу молекул <N>, проникших в нанотрубку; 2) Скорость заполнения нанотрубки $dy/d\tau$ можно выбирать за счет коэффициентов ν_0, x_0 из эксперимента и возможен случай $dy/dt > dy_3/dt$; 3) Механическая модель заполнения нанотрубки допускает предельную глубину проникания молекул.